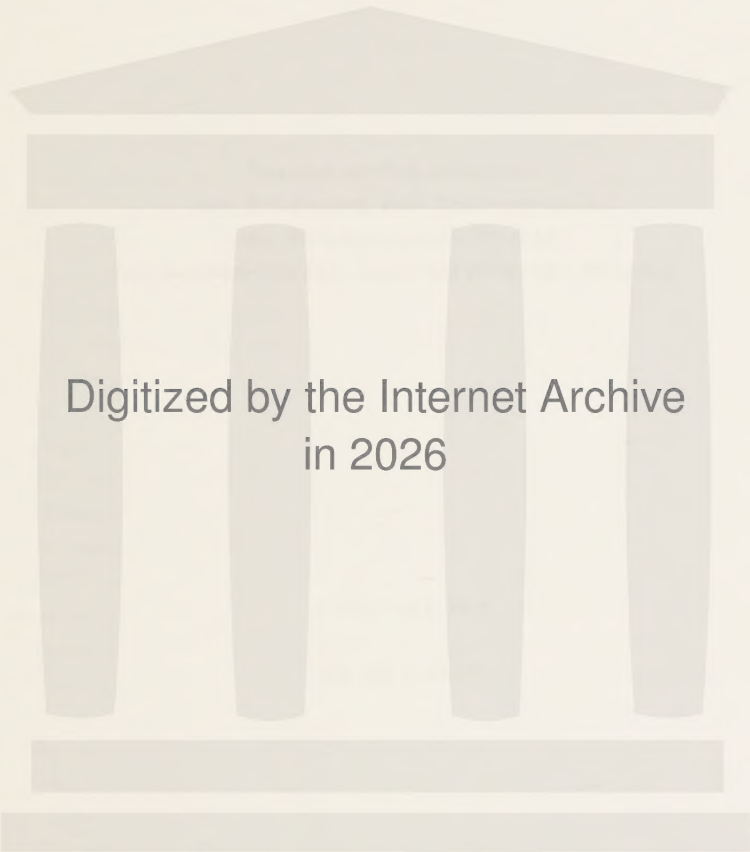


**Untersuchungen zur mikroskopischen Theorie
des optischen Potentials
(Optisches Theorem, Graphenentwicklungen
und Dispersionsrelationen)**

Gustav Eckart

1975



Digitized by the Internet Archive
in 2026

Untersuchungen zur mikroskopischen Theorie des optischen
Potentials (Optisches Theorem, Graphenentwicklungen und
Dispersionsrelationen)

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
des Fachbereiches Physik
der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von

Gustav Eckart

München

September 1975



1. Referent: Prof. Dr. M. Weigel

2. Referent: Prof. Dr. W. Hering

Tag der mündlichen Prüfung: 15. 12. 1975

Zusammenfassung/Abstract

This work is divided into three parts: The first deals with some general aspects of the optical potential. We start with the definition of the generalized optical model potential $V_{\text{opt}}(E)$ as given by Bell and Squires (BS59). These authors use the Greens-function formulation of many-particle theory and most of the present work is also based on this formalism. Then the normalization problem for the scattering states of such a nonhermitian potential is discussed. This is not trivial because of its energy dependence which can be very strong in some energy regions (e.g. poles). A formulation of the optical theorem is given which exhibits the exact connection between the imaginary part of $V_{\text{opt}}(E)$ and the total reaction cross section for nucleons of energy E .

In the second section a special decomposition of the energy dependent part of $V_{\text{opt}}(E)$ is carried out, in which those terms of the Feynman-expansion of $V_{\text{opt}}(E)$, which contain a given number of intermediate continuum-one-particle-propagators, are grouped together. The foundation of this decomposition is evident from the first section, because the imaginary part of the explicitly considered three first terms turns out to be approximately proportional to the sum of the total cross sections of inelastic, pick-up and knock-out processes. This sum should exhaust the main part of the total reaction cross section. In the frame of this theory different integral equations for the particle-particle-hole-response function and special effective interactions are derived and discussed.

In the third and last chapter a dispersion relation is used for calculating the real part of $V_{\text{opt}}(E)$ from its imaginary part, which, according to section one, is connected with the total reaction cross section. The Tabakin nucleon-nucleon-interaction is chosen, because one can calculate explicitly the scattering matrix and the Hartree-Fock-potential (in matter). For the evaluation of the cross section, use is made of the impulse approximation for the single scattering term of the multiple-scattering theory. In this case the form factor of the target (the Fourier transform

of the density correlation function) can explicitly be calculated in the local density approximation, if one takes the target to be a Hartree-Fock gas. With the help of a simple theory of "local equivalent potentials" we get a local imaginary part of $V_{\text{opt}}(E)$, which agrees satisfactorily with experimental data up to about 500 MeV. The real part turns out to be systematically too low. If one assumes for $\text{Im } V_{\text{opt}}(E)$ a range of nonlocality going from about 1 F at low energies to zero at about 500 MeV, one gets a real part which is on the average 2.5 MeV lower than in the case of a purely local assumption for $\text{Im } V_{\text{opt}}(E)$. By introducing the parameter $\text{Re } V_{\text{opt}}(E_0)$ for a special value E_0 of the energy (which seems to be justified due to the "unphysical" behaviour of $\text{Im } V_{\text{opt}}(E)$ for energies above 500 MeV), it is possible, using the subtracted form of the dispersion relation, to correct the behaviour of the real part so that good agreement with phenomenological experimental potential depths is achieved. The radial extension of the calculated local potentials reaches a little beyond the half density radius (on the average 0.6 F for the imaginary part and 0.3 F for the real part). For lower energies (25-50 MeV) the imaginary part shows a pronounced enhancement of the absorption at the nuclear surface.

Inhalt

	Seite
1. Einleitung	1
2. Generelle Aussagen zum verallgemeinerten optischen Potential	5
2.1 Definition des verallgemeinerten optischen Potentials V_{opt}^A (Massenoperator)	5
2.2 Lippmann-Schwinger-Gleichungen für die Streuzustände von V_{opt} ; das Normierungsproblem	8
2.3 Ableitung des optischen Theorems; explizite Trennung von elastischem und Reaktions-Wirkungsquerschnitt	11
2.4 Die Dispersionsbeziehung für das verallgemeinerte optische Potential	16
3. Zerlegung des Massenoperators nach Ordnungen intermediärer Kontinuum-Propagatoren	19
3.1 Die Sechs-Punkt-Antwortfunktion. Erläuterung des Zerlegungsverfahrens nach g^C -Linien	19
3.2 Rein diskreter Beitrag zum resonanten Anteil v^R des Massenoperators	24
3.3 Beiträge mit einer g^C -Linie	25
3.4 Diskussion höherer Beiträge; graphische Veranschaulichung einiger Gleichungen	28
3.5 Der Imaginärteil verschiedener Terme von V_{opt} ; Vergleich mit dem Ergebnis aus 2.3	31
3.6 Zusammenfassung und Diskussion	37
4. Untersuchung des kausalen Charakters von V_{opt} durch Nachprüfen der Dispersionsbeziehung aus 2.4	40
4.1 Beschreibung des Modells	40
4.2 Berechnung eines ortsabhängigen Potentials aus	

	Seite
Gleichung (2.3.18') in Born'scher Näherung für die Streuwellen	42
4.3 Lokale-Dichte-Näherung für $\bar{W}(e_k)$; lokale äqui- valente Potentiale; Gleichungen des Modells	45
4.4 Beschreibung der numerischen Rechnungen	50
4.5 Diskussion der Ergebnisse; Abbildungen	52
A Anhang	77
A.1 Die normalen Green'schen Funktionen; Dyson- Gleichung und Bethe-Salpeter-Gleichungen	77
A.2 Integralgleichungen für die Sechspunkt-Ant- wortfunktion	81
A.3 Gleichungen für die irreduziblen Vertices K^{ph} , K^{pp} sowie für den reduzierten Vertex Γ	86
A.4 Inelastische Streuung am Grundzustand eines Kernes im Formalismus der Green'schen Funktionen	89
A.5 Zur Wechselwirkung K^{phd}	94
A.6 Exakter Beweis von Gleichung (3.3.1); Terme mit zwei g^C -Linien	97
A.7 Behandlung des Hard-Core (Renormierung der freien Wechselwirkung)	102
A.8 Die Stoßnäherung für den Einfachstreuterm der Vielfachstreutheorie	104
A.9 Die Autokorrelationsfunktion in Kernmaterie bei Vernachlässigung der Teilchen-Loch-Wech- selwirkung	108
A.10 Berechnung der Autokorrelationsfunktion für ein Hartree-Fock-Gas in effektiver-Masse-Nä- herung	111
A.11 Das Tabakin-Potential; die quadrierte Streu- amplitude	113
Literaturverzeichnis	115

1. Einleitung

Diese Arbeit hat das „verallgemeinerte optische Potential“ V_{opt}^A zum Gegenstand. Es ist dasjenige energieabhängige und nichthermitesche Einteilchenpotential, welches - bis auf Rückstoßeffekte - die elastische Streuung von Nukleonen an einem gegebenen Kern A exakt beschreibt. Das bedeutet insbesondere, daß die Ununterscheidbarkeit von Projektil und Targetnukleonen in V_{opt}^A korrekt berücksichtigt ist: Dies wird durch Verwendung der feldtheoretischen Methode der Green'schen Funktionen erreicht (MS59, BK62, Ab63, BW63, No64). Dieser Formalismus gestattet eine symmetrische Behandlung von Vielteilchenproblemen in mehreren Bereichen der Physik und wurde von Migdal und Mitarbeitern (Mig61-62, Mig66-67, LM63-64, ML64) als „Theorie endlicher Fermionensysteme“, in Verallgemeinerung der Landau'schen Theorie der Fermiflüssigkeiten (Ld59), auf Atomkerne angewandt.

Im einzelnen gliedert sich die vorliegende Arbeit in drei Teile. Im ersten, Kapitel 2, werden zunächst das optische Potential sowie dessen Streuzustände definiert. Das Normierungsproblem für diese wird diskutiert. Es folgt eine Ableitung des optischen Theorems für Streuung von Nukleonen am optischen Potential, in der der totale Wirkungsquerschnitt

$\sigma_{\text{tot}}(k)$ explizit in einen elastischen und einen Reaktions-Anteil aufgespalten wird. Von zentraler Bedeutung ist dabei der exakte Ausdruck, den man für den Reaktionsquerschnitt σ_R erhält:

$$\sigma_R(k) = -\frac{\hbar^2 k}{2m} \langle k^{(+)}, | \text{Im } V_{\text{opt}}^A(\frac{\hbar^2 k^2}{2m}) | k^{(+)} \rangle. \quad (1.1)$$

Es handelt sich hierbei um die Verallgemeinerung eines für energieunabhängige lokale komplexe Potentiale seit langem bekannten Zusammenhangs (Gl59, S.324). Schließlich wird eine Dispersionsbeziehung angegeben, welcher V_{opt}^A aufgrund seines kausalen Charakters genügt (Fe58, Fe62, Lip66).

Die beiden folgenden Teile dieser Untersuchung machen an

entscheidender Stelle Gebrauch von der Relation (1.1). In Kapitel 3 wird - ausgehend von der exakten Vielteilchentheorie - im Hinblick auf eventuelle numerische Rechnungen eine Zerlegung von V_{opt}^A in Terme angegeben, welche sich durch eine verschiedene Anzahl von intermediären Kontinuum-Propagatoren g^C unterscheiden. Bereits der Anteil mit einer einzigen g^C -Linie enthält zwei Kontinuum-Kontinuum-Matrixelemente einer speziellen effektiven Wechselwirkung. Nimmt man, wie es etwa in der Mahaux-Weidenmüller'schen Schalenmodelltheorie der Kernreaktionen (MW69, GHW67) diskutiert wird, an, daß diese Matrixelemente im Vergleich zu denjenigen, welche weniger Kontinuumkomponenten haben, klein sind, so sollte man die Entwicklung bereits nach diesem Term abbrechen können. Ein Kriterium für die Gültigkeit dieser Annahme liefert die Beziehung (1.1): Bildet man nämlich den Imaginärteil des approximierten V_{opt}^A , $\bar{V}_{\text{opt}}^A$, und setzt diesen in (1.1) ein, so sollte schon der größte Teil des Reaktionsquerschnitts ausgeschöpft werden, wenn die Näherung $\bar{V}_{\text{opt}}^A$ gut ist. Zur theoretischen Bewältigung dieser Frage ist eine Kenntnis der Streutheorie im Rahmen des Formalismus der Green'schen Funktionen erforderlich (Zh65, Su71, Em71, Br67, We69, Wg69, Wg74, Wi75). Es stellt sich heraus, daß der Term erster Ordnung in g^C ungefähr den inelastischen Wirkungsquerschnitt liefert. Ein weiterer Term, der explizit aufsummiert werden kann, enthält die korrelierte Bewegung zweier Teilchen im Kontinuum in allen Ordnungen in g^C und liefert, eingesetzt in (1.1), im wesentlichen den Knock-out- sowie den Pick-up-Wirkungsquerschnitt.

In Kapitel 4 schließlich wird der kausale Charakter von $V_{\text{opt}}^A(E)$ durch Nachprüfen der oben erwähnten Dispersionsbeziehung untersucht. Es handelt sich hierbei um eine Modellrechnung, welche als Ausgangspunkt die Beziehung (1.1) in Bornscher Näherung für die Streuwellen $|\xi^{(i)}\rangle$ von V_{opt}^A benützt. Diese Rechnung stellt eine Präzisierung und Verallgemeinerung auf endliche Kerne einer Theorie von M. Weigel und D. Mackdar (WM68). Der Reaktionswirkungsquerschnitt $\sigma_R^{(i)}$ wird für ein Target berechnet, welches sich aus Kernmaterie radial variabler Dichte in Hartree-Fock-Näherung zusammensetzt (lo-

kale-Dichte-Approximation, „LDA“). Man geht zur Berechnung der Streuamplitude von der Stoßnäherung für den Einfachstreuterm der sogenannten Vielfachstreutheorie („multiple scattering theory“, siehe z.B. RT67, S.350ff) aus. In dem Ausdruck für $\mathcal{G}_R(q)$ tritt die Fouriertransformierte der Autokorrelationsfunktion der Dichteschwankungen (No64, S.52ff, WM68) auf. Diese Funktion, $R(q, \omega)$, charakterisiert die Wahrscheinlichkeit einer Teilchen-Loch-Anregung im Target bei gegebenem Impuls- und Energie-Übertrag q bzw. ω . In den numerischen Rechnungen, welche das nichtlokale Tabakin-Potential als Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung verwenden (Ta64), wird $R(q, \omega)$, im Einklang mit der LDA, für Kernmaterie variabler Dichte in Hartree-Fock-Näherung eingesetzt. Die einzige Annahme, die von außen in das Modell eingebracht werden muß, betrifft die Form der Nichtlokalität von $\text{Im } V_{\text{opt}}^A(k^2/2m)$. Es wird, in Übereinstimmung mit Argumenten anderer Autoren (Pa67-68, ARK69, Ri63), angenommen, daß deren Reichweite von ungefähr einem Fermi bei niedriger Einschußenergie auf Null bei etwa 500 MeV sinkt. Die Annahme eines rein lokalen $\text{Im } V_{\text{opt}}^A$ wird ebenfalls geprüft. Um einen Vergleich mit aus Experimenten gewonnenen Potentialtiefen zu ermöglichen, wird eine Methode von Frahn (Fr65) zur Bestimmung eines äquivalenten lokalen Potentials verwandt. Die so erhaltenen Ergebnisse werden in einem abschließenden Abschnitt ausführlich diskutiert und graphisch dargestellt.

Um einerseits eine möglichst geschlossene Darstellung zu erreichen und andererseits deren Fluß nicht durch längere Zwischenrechnungen zu stören, werden diese im Anhang durchgeführt. Er enthält zunächst eine knappe Einführung in den Formalismus der Green'schen Funktionen, als Anwendung eine Herleitung verschiedener Integralgleichungen für die sogenannte Sechspunkt-Antwortfunktion (ES69, Wi72), daraus resultierende Gleichungen für spezielle effektive Wechselwirkungen und die Theorie der inelastischen Nukleonenstreuung nach (Em71). Es folgen einige Zwischenrechnungen und Ergänzungen zu Kapitel 3. Danach wird die Stoßnäherung für den Einfachstreuterm der Vielfachstreutheorie behandelt; die oben erwähnte Autokorrelationsfunktion $R(q, \omega)$ wird für Kernmaterie unter Vernach-

lässigung der Teilchen-Loch-Korrelationen hergeleitet und für ein Hartree-Fock-Gas in effektiver-Masse-Näherung explizit berechnet. Zum Schluß wird kurz auf das Tabakin-Potential (Ta64) eingegangen.

2. Generelle Aussagen zum verallgemeinerten optischen Potential

2.1 Definition des verallgemeinerten optischen Potentials V_{opt}^A (Massenoperator)

Die Streuung eines Nukleons an einem Kern ist -mikroskopisch betrachtet- ein komplizierter Prozess, der im Prinzip zu seiner Beschreibung eine detaillierte Reaktionstheorie erfordert. Es hat sich in der Kernphysik schon sehr früh gezeigt, daß man die elastische Nukleonenstreuung in groben Zügen (schmale Compoundkernresonanzen z.B. werden „ausgeschmiert“) recht gut durch ein Einteilchenpotential beschreiben kann. Durch das Herausprojizieren aller inelastischen Reaktionskanäle muß dieses Potential notwendig nichthermitesch sein. Phänomenologisch hat man dies durch Einführung eines Imaginärteils zu berücksichtigen, ähnlich wie man in der Optik den Durchgang eines Lichtstrahls durch ein brechendes Medium mit Absorption mit Hilfe eines komplexen Brechungsindex beschreibt. Erschöpfende Literaturangaben zum phänomenologischen optischen Potential findet man in der Monographie von Hodgson (Ho63, siehe auch Ho71).

Die erste mikroskopisch korrekte Definition des verallgemeinerten optischen Potentials V_{opt} , welches die elastische Streuung von Nukleonen exakt beschreibt, stammt von Bell und Squires (BS59, Be62). Sie verwenden den Formalismus der Green-schen Funktionen der Vielkörpertheorie (MS59, BK62, Ab63, BW63, No64, FW71). Dieser eignet sich in natürlicher Weise zur Beschreibung der Bewegung eines oder mehrerer „Quasiteilchen“ über einem gegebenen Untergrund, meist dem Grundzustand des betrachteten Systems. Eine knappe Darstellung dieses Formalismus findet sich im Anhang A.1. Zunächst seien einige generelle Definitionen angegeben: Der Hamiltonoperator laute in 2. Quantisierung

$$H = K_{\alpha\delta} a_{\alpha}^{\dagger} a_{\delta} + \frac{1}{2} V_{\alpha\beta\gamma\delta} a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta}^{\dagger} a_{\delta} a_{\gamma} \quad . \quad (2.1.1)$$

Hierbei sei $v^{(2)}$ die antisymmetrisierte Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung $v^{(2)}$:

$$V_{\alpha\beta\gamma\delta} := \frac{1}{2} (v_{\alpha\beta\gamma\delta} - v_{\beta\alpha\gamma\delta}) . \quad (2.1.2)$$

Das Pauliprinzip wird durch die Antikommutatorregeln für Fermionen

$$\{a_\alpha, a_\beta\} = \{a_\alpha^+, a_\beta^+\} = 0 , \quad (2.1.3)$$

$$\{a_\alpha, a_\beta^+\} = \delta_{\alpha\beta}$$

berücksichtigt. „a“ bedeutet hier einen vollständigen Satz von Einteilchenquantenzahlen (ohne Zeitparameter). Über doppelt vorkommende Indices wird „summiert“: Dies beinhaltet genauer Summation über alle diskreten Quantenzahlen und Integration über die kontinuierlichen.

In Anhang 4 (A.4.1,1') werden die Formeln für die Streuzustände $|\psi_i^{(+)}\rangle$ (bzw. $|\psi_f^{(-)}\rangle$) für die Streuung eines Teilchens mit asymptotisch einlaufendem Impuls k_i an einem Target im Zustand $|n\rangle$ angegeben:

$$|\psi_i^{(+)}\rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \epsilon \int_{-\infty}^0 e^{-i(e_i + i\epsilon)t} a_{k_i}^+(t) |n\rangle dt , \quad (2.1.4)$$

$$a_{k_i}^+(t) = e^{iHt} a_{k_i} e^{-iHt} . \quad (2.1.5)$$

Formal ergibt (4)

$$\begin{aligned}
 |\psi_i^{(+)}\rangle &:= |k_i^{(+)}, n\rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{i\epsilon}{e_i + E_n - H + i\epsilon} a_{k_i}^+ |n\rangle = \\
 &= \left(a_{k_i}^+ + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{e_i + E_n - H + i\epsilon} [V, a_{k_i}^+] \right) |n\rangle .
 \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

"[,]" ist der übliche Kommutator. Sehr schön und ausführlich wird die Theorie von F. Villars (Vi67) beschrieben. Für $|\psi_f^{(-)}\rangle$ gilt entsprechend

$$|\psi_f^{(-)}\rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{-i\epsilon}{e_f + E_n - H - i\epsilon} . \tag{2.1.6'}$$

Nun definiert man die optische Modellwellenfunktion $\varphi_{k(+)}(\mathbf{r})$ durch (Be62, Br67, We69)

$$\begin{aligned}
 \varphi_{k(+)}(\tau) &:= \langle 0 | a_{\tau} | k^{(+)}, 0 \rangle = \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \langle 0 | a_{\tau} \frac{i\epsilon}{e_k + (H - E_0) + i\epsilon} a_k^+ | 0 \rangle ,
 \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

d.h. $\varphi_{k(+)}(\tau)$ ist gleich der Projektion des vollständigen Streuzustands auf denjenigen, welcher aus dem Grundzustand $|0\rangle$ des Targets plus einem Teilchen mit den Quantenzahlen $\mathbf{r} := (\mathbf{p}, \tau)$ besteht (Im Folgenden seien Vektoren durch unterstrichene Buchstaben explizit gekennzeichnet). Ein Vergleich mit den Formeln (A.4.6) aus dem Anhang zeigt, daß dies gleich

$$\begin{aligned}
 \varphi_{\underline{k}^{(+)}}(\tau) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} i\epsilon g_{\tau k}^{00}(\epsilon_k) \\
 &:= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} i\epsilon g_{\tau k}(\hbar^2 k^2 / 2m)
 \end{aligned} \tag{2.1.8}$$

ist. Nachdem hiermit der Zusammenhang mit der Einteilchen-

Greenfunktion („Zweipunktfunktion“) hergestellt ist, kann man die im Anhang dargestellte Theorie derselben verwenden. Nach (A.1.15) erfüllt $\varphi_{k^{(+)}}(r)$ die Dysongleichung. Nach Bildung des Grenzwertes (8) folgt

$$-\frac{\nabla^2}{2m} \varphi_{k^{(+)}}(r) + \int d^3r' \langle r | v(e_k) | r' \rangle \varphi_{k^{(+)}}(r') = e_k \varphi_{k^{(+)}}(r) \quad (2.1.9)$$

Damit hat man das Resultat erhalten, daß das verallgemeinerte optische Potential gleich dem Massenoperator, genommen auf der Energieschale $e_k = k^2/2m$ ist. Es ist notwendig nichtlokal und energieabhängig. Das gewöhnliche optische Potential erhält man dadurch, daß man $V_{\text{opt}}(e_k) = v(e_k)$ über ein geeignetes Energieintervall mittelt. Dadurch werden die Singularitäten „ausgeschmiert“.

2.2 Lippmann-Schwinger-Gleichungen für die Streuzustände von V_{opt} ; das Normierungsproblem

Gleichung (2.1.9), die Schrödingergleichung für ein Teilchen im optischen Potential, lautet schematisch (K = Operator der kin. Energie)

$$(K + v(e_k)) |k^{(+)}\rangle = e_k |k^{(+)}\rangle \quad (2.2.1)$$

mit

$$\varphi_{k^{(+)}}(r) = \lim_{\substack{\epsilon \in \mathbb{R} \\ (2.1.8) \quad \epsilon \rightarrow 0^+}} i\epsilon g_{r,k}(e_k) := \langle r | k^{(+)} \rangle \quad (2.2.2)$$

Da $v(e_k)$ ($= V_{\text{opt}}(e_k)$) ein nichthermitescher Operator ist, sind die Streuzustände $|k^{(+)}\rangle$ nicht auf eine Deltafunktion normierbar. Selbst die übliche Methode der Einführung „adjungierter“

Zustände $|\tilde{k}\rangle$ wird, wie unten gezeigt, nicht auf die übliche Weise (siehe z.B. RT67, S.120) zu einem biorthogonalen Funktionensystem führen, da v von der Energie e_k des Zustands, auf den es wirkt, abhängt. Zum Beweis geht man im einzelnen folgendermaßen vor: Zunächst seien die Zustände $|\tilde{k}\rangle$ definiert durch

$$(K + v^\dagger(e_k)) |\tilde{k}\rangle = e_k |\tilde{k}\rangle. \quad (2.2.3)$$

Die zu (1) und (3) gehörenden Lippmann-Schwinger-Gleichungen lauten

$$|k^{(u)}\rangle = |k\rangle + \frac{1}{e_k - K + i\varepsilon} v(e_k) |k^{(u)}\rangle \quad (2.2.4)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{e_k - K - v(e_k) + i\varepsilon} v(e_k) \right) |k\rangle, \quad (2.2.4')$$

$$|\tilde{k}^{(u)}\rangle = |k\rangle + \frac{1}{e_k - K + i\varepsilon} v^\dagger(e_k) |\tilde{k}^{(u)}\rangle \quad (2.2.5)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{e_k - K - v^\dagger(e_k) + i\varepsilon} v^\dagger(e_k) \right) |k\rangle \quad (2.2.5')$$

($\langle \alpha | k \rangle$ ist die ebene Welle: $(e_k - K) |k\rangle = 0$).

Die Gleichungen (4') und (5') folgen aus den ungestrichenen Gleichungen auf die übliche Weise (s. RT67, S.178). Entsprechende Gleichungen, die die T-Matrizen enthalten, werden im folgenden Abschnitt angegeben. Um nachzuprüfen, ob $|\tilde{k}^{(u)}\rangle$ und $|\tilde{k}^{(s)}\rangle$ ein biorthogonales Funktionensystem darstellen, bilde man

$$\langle \tilde{k}^{(u)} | k^{(s)} \rangle_{(s')} = \langle k' | \left[1 + v(e_{k'}) \frac{1}{e_{k'} - K - v(e_{k'}) + i\varepsilon} \right] | k^{(s)} \rangle. \quad (2.2.6)$$

Aus der Operatoridentität $\frac{1}{A} = \frac{1}{B} - \frac{1}{A} (A-B) \frac{1}{B}$ folgt:

$$\frac{1}{e_{k'} - K - v(e_k) - i\varepsilon} = \frac{1}{e_{k'} - K - v(e_k) - i\varepsilon} - \frac{1}{e_{k'} - K - v(e_k) - i\varepsilon} (v(e_k) - v(e_{k'})) \frac{1}{e_{k'} - K - v(e_k) - i\varepsilon} \quad (2.2.7)$$

Dies setze man in (6) ein. Es folgt

$$\begin{aligned} \langle \tilde{k}^{(4)} | k^{(4)} \rangle &= \langle k' | k^{(4)} \rangle + \frac{1}{e_{k'} - e_k} \cdot \langle \tilde{k}^{(4)} | v(e_{k'}) | k^{(4)} \rangle - \\ &- \frac{1}{e_{k'} - e_k - i\varepsilon} \langle k' | v(e_{k'}) \frac{1}{e_{k'} - K - v(e_{k'}) - i\varepsilon} v(e_k) | k^{(4)} \rangle \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Wegen (5) aber ist

$$\langle k' | k^{(4)} \rangle = - \frac{1}{e_{k'} - e_k - i\varepsilon} \langle k' | v(e_{k'}) | k^{(4)} \rangle + \langle k' | k \rangle \quad (2.2.9)$$

In (8) eingesetzt ergibt dies

$$\langle \tilde{k}^{(4)} | \left\{ 1 - \frac{v(e_{k'}) - v(e_k)}{e_{k'} - e_k} \right\} | k^{(4)} \rangle = \langle k' | k \rangle \quad (2.2.10)$$

Man erkennt, daß für ein energieabhängiges v auch die Biorthogonalität i.A. nicht mehr gilt. Für $k'=k$ folgt

$$\langle \tilde{k}^{(4)} | \left\{ 1 - \frac{dv}{de} \bigg|_{e=e_k} \right\} | k^{(4)} \rangle = \langle k | k \rangle \quad (2.2.10')$$

In Bereichen, wo v nur schwach von der Energie abhängt, ist, wie an (10) bzw. (10') erkenntlich, eine annähernde Biorthogonalität erfüllt.

2.3 Ableitung des optischen Theorems; explizite Trennung von elastischem und Reaktions- Wirkungsquerschnitt

Um das optische Theorem zu formulieren, benötigt man zunächst die T-Matrix der elastischen Streuung. Diese ist durch

$$T(e_k) |k\rangle = v(e_k) |k^{(4)}\rangle \quad (2.3.1)$$

gegeben. Zhivopistsev (Zh65) hat gezeigt, daß die T-Matrix gleich dem „reduziblen Massenoperator“ $T(e_k)$ (siehe (A.1.3)) ist. Dieser hängt mit dem gewöhnlichen „irreduziblen“ Massenoperator $v(e_k)$ durch die Relation

$$v g = T g^0 = (v + v g^0 v + v g^0 v g^0 v + \dots) g^0 \quad (2.3.2)$$

$$= v g^0 + g^0 v g^0 + g^0 v g^0 g^0 + \dots$$

zusammen. Aus den Bewegungsgleichungen der Green'schen Funktionen folgt durch Einsetzen von (A.1.10 d) in (A.1.10 a) und Vergleich mit (A.1.3)

$$T_{11} = -2i V_{1\alpha 1/\beta} g_{\beta\alpha} + V_{1\beta\gamma\delta} g_{\beta\gamma\delta} g_{\delta'\beta} V_{\delta'\epsilon'1/\beta'} \quad (2.3.3)$$

Für v_{11} gilt nach Anhang 2, Formeln (A.2.2-4)

$$v_{11} = -2i V_{1\alpha 1/\beta} g_{\beta\alpha} + V_{1\beta\gamma\delta} R_{\beta\gamma\delta} g_{\delta'\beta} V_{\delta'\epsilon'1/\beta'} \quad (2.3.4)$$

d.h. v unterscheidet sich von T durch die Ersetzung von $g^{(3)}$ im zeitabhängigen Term von (3) durch die Sechspunkt-Antwortfunktion $R^{(3)}$. (Im Folgenden soll überall, falls die

Energieabhängigkeit nicht explizit angegeben ist, in die „Summation“ über doppelt vorkommende Indices eine entsprechende Zeitintegration eingeschlossen sein.)

Nach Schuck (Su71) geht man nun zum Beweis des optischen Theorems folgendermaßen vor: Durch Fouriertransformation von (3) erhält man $T(e_k)$. In dem resonanten (d.h. energieabhängigen) Term $V^{(2)}_g^{(3)} V^{(2)}$ wird dabei die Spektraldarstellung von $g^{(3)}$ eingesetzt. Da $g^{(3)}$ hier nur von einer Zeitdifferenz abhängt ($V^{(2)}$ ist eine instantane Wechselwirkung), ist dies einfach, und man erhält:

$$\begin{aligned}
 T_{kk}^A(e_k) &= v_{kk}^{HF^A} + \\
 &+ \sum_{S_{A+1}} \frac{\langle 0_A | V_{k234} a_2^+ a_3 a_4 | S_{A+1} \rangle \langle S_{A+1} | V_{k'3'2'k'} a_4^+ a_3^+ a_2' | 0_A \rangle}{e_k - \omega_{S_{A+1}} + i\epsilon} \\
 &+ \sum_{S_{A-1}} \frac{\langle 0_A | V_{k'3'2'k'} a_4^+ a_3^+ a_2' | S_{A-1} \rangle \langle S_{A-1} | V_{k234} a_2^+ a_3 a_4 | 0_A \rangle}{e_k + \omega_{S_{A-1}} - i\epsilon}
 \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

mit

$$\begin{aligned}
 \omega_{S_{A+1}} &= E_S^{A+1} - E_0^A = \epsilon_{S_{A+1}}' + \mu_{A+1}, \\
 \omega_{S_{A-1}}' &= E_{S'}^{A-1} - E_0^A = \epsilon_{S_{A-1}}' - \mu_A, \\
 \mu_A &= E_0^A - E_0^{A-1}.
 \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

E_S^A ist die Energie des Zustandes $|S_A\rangle$ des A-Teilchensystems, ϵ_{S_A}' die entsprechende Anregungsenergie und μ^A das chemische Potential. Diese Definitionen werden im Folgenden konsequent verwendet. Der obere Index „A“ bei T , v , v_{opt} usw. wird weggelassen, wenn keine Mißverständnisse auftreten können. v^{HF} ist durch den ersten Term von (3) bzw. (4) gegeben. Es handelt sich nicht um das Hartree-Fock-Potential im üblichen Sinne, sondern um den exakten statischen, d.h. energieunabhängigen Anteil des Massenoperators. Er wird von Baranger in einem

anderen Zusammenhang ausführlich diskutiert (Ba70). v^{HF} ist das „ideale Schalenmodellpotential“, dessen Eigenzustände prinzipiell als Basis für eine Schalenmodelltheorie gewählt werden sollte.

Bildet man den Imaginärteil von (5), so folgt (für $e_k > 0$ liefert der 2. Summand keinen Beitrag):

$$\text{Im } T_{kk}(e_k) = -\pi \sum_{s_{A+1}} |\langle s_{A+1} | [V, a_k^\dagger] | 0_A \rangle|^2 \delta(e_k + E_0^A - E_s^{A+1}) \quad (2.3.7)$$

Nach Villars (Vi67) ist $\langle s_{A+1} | [V, a_k^\dagger] | 0_A \rangle$ genau gleich dem T-Matrixelement T_{fi} mit $|f\rangle = |s_{A+1}\rangle$, $|i\rangle = a_k^\dagger |0_A\rangle$, d.h. (7) ist gleichbedeutend mit

$$\text{Im } T_{kk}(e_k) = -\pi \sum_f |T_{fi}|^2 \delta(E_f - E_i) \quad (2.3.7')$$

Eine kurze Umrechnung liefert auf die übliche Weise (siehe z.B. R767 S. 236)

$$\text{Im } T_{kk}(e_k) = -\frac{\hbar^2 k}{2m} \sigma_{\text{el}}(k) \quad (2.3.8)$$

Dies ist das optische Theorem in der üblichen Form. Im Folgenden wird eine Ableitung gegeben, die $\sigma_{\text{tot}}(k)$, den totalen Wirkungsquerschnitt, explizit in einem elastischen und einem Reaktions-Querschnitt trennt. Zu diesem Zweck werde zunächst die Lippmann-Schwinger-Gleichung (2.2.4) umgeschrieben: Per definitionem ist

$$v(e_k) |k^{(+)}\rangle = T(e_k) |k\rangle \quad (2.3.9)$$

so daß gilt:

$$| \frac{1}{2}^{(+)} \rangle = (1 + g_0^{(+)}(e_k) T(e_k)) | \frac{1}{2} \rangle \quad (2.3.10)$$

mit

$$g_0^{(\pm)}(e_k) = \frac{1}{e_k - K \pm i\varepsilon} \quad (2.3.10')$$

Bildet man das hermitesch Adjungierte zu $g_0^{(\pm)}$, so folgt

$$\left[g_0^{(\pm)}(e_k) \right]^+ = g_0^{(\mp)}(e_k) \quad (2.3.11)$$

Real- und Imaginärteil von Operatoren seien durch

$$\operatorname{Re} A := \frac{1}{2} (A + A^+) \quad , \quad \operatorname{Im} A := \frac{1}{2i} (A - A^+) \quad (2.3.12)$$

gegeben. Es gilt:

$$\operatorname{Im} \langle a | A | a \rangle = \langle a | \operatorname{Im} A | a \rangle \quad (2.3.13)$$

für beliebige Zustände $|a\rangle$. Mit diesen Definitionen folgt
(Der Kürze halber werde die Variable e_k weggelassen)

$$\begin{aligned} 2i \operatorname{Im} T &= T - T^+ = \\ &= T^+ (g_0^{(+)} - g_0^{(-)}) T + 2i \operatorname{Im} [(1 + T^+ g_0^{(-)}) T] \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

Setzt man in dieser Identität im zweiten Summanden die aus (2.3.2) folgende Beziehung

$$T(e_k) = v(e_k) + v(e_k) g_o^{(+)}(e_k) T(e_k) \quad (2.3.15)$$

ein, so folgt

$$\begin{aligned} \langle k | \mathcal{M} T | k \rangle &= -\pi \langle k | T^\dagger \delta(e_k - K) T | k \rangle + \\ &+ \langle k | \mathcal{M} \{ (1 + T^\dagger g_o^{(-)}) v (1 + g_o^{(+)} T) \} | k \rangle. \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung von (10)-(13) liefert dies

$$\begin{aligned} \mathcal{M} T_{k k'}(e_k) &= -\pi \sum_{k'} |T_{k k'}(e_k)|^2 \delta(e_k - e_{k'}) + \\ &+ \mathcal{M} \langle k' | \mathcal{M}(e_k) | k' \rangle. \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

Der erste Term auf der rechten Seite ergibt analog zu (8) $-(\hbar^2 k / 2m) \sigma_{el.}(k)$, wobei $\sigma_{el.}(k)$ der elastische Wirkungsquerschnitt ist:

$$\begin{aligned} \sum_{k'} \dots &:= \sum_{e_k, e_{k'}} \int \frac{1}{(2\pi)^3} d^3 k' \dots = \sum_{e_k, e_{k'}} \frac{m \hbar^2}{(2\pi)^3 \hbar^2} \int d e_{k'} d \Omega_{k'} \dots \\ \Rightarrow -\pi \sum_{k'} \dots &= -\frac{\hbar^2 k}{2m} \sum_{e_k, e_{k'}} \int d \Omega_{k'} |f_{k k'}|^2 = -\frac{\hbar^2 k}{2m} \sigma_{el.}(k). \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

($f := \frac{2m}{4\pi \hbar^2} T$)

(Man beachte, daß compoundelastische Streuung hier in $\sigma_{el.}(k)$ enthalten ist!)

Aus (8), (17) und (16) folgt insgesamt

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{\text{tot}}(k) &= \bar{\sigma}_{\text{el.}}(k) + \bar{\sigma}_R(k) \quad , \\ &- \frac{\hbar^2 k}{2m} \bar{\sigma}_R(k) = \langle k^{(+)} | \text{Im } v(e_k) | k^{(+)} \rangle .\end{aligned}\quad (2.3.18)$$

$\sigma_R(k)$ ist der Reaktionswirkungsquerschnitt. Eine Mittelung über die Spin- und Isospin-Quantenzahlen η_k ergibt den Wirkungsquerschnitt für unpolarisierte inelastische Nukleonenstreuung

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_R(1\frac{1}{2}1) : \\ &- \frac{\hbar^2 k}{2m} \cdot \frac{1}{4} \sum_{\eta_k} \bar{\sigma}_R(k) := - \frac{\hbar^2 k}{2m} \bar{\sigma}_R(1\frac{1}{2}1) - \\ &= \frac{1}{4} \sum_{\eta_k} \langle k^{(+)} | \text{Im } v(e_k) | k^{(+)} \rangle .\end{aligned}\quad (2.3.18')$$

(18) ist die Verallgemeinerung einer Beziehung, die für energieunabhängige lokale Potentiale seit langem bekannt ist (vgl. R.J. Glauber (G159) S. 319-324).

2.4. Die Dispersionsbeziehung für das verallgem. opt. Potential

Die Dysongleichung (A.1.15') für den Einteilchenpropagator lautet in der zeitlichen Darstellung

$$-i \frac{\partial}{\partial t_1} g_{12}(t_{12}) + K_{13} g_{32}(t_{12}) + \int dt_3 v_{13}(t_{13}) g_{32}(t_{32}) = -\delta(t_{12}) \delta_{12} . \quad (2.4.1)$$

Setzt man $t_{12} := t_1 - t_2 := t$, $t_{32} := t_3 - t_2 := \tau$, so folgt

$$-i \frac{\partial}{\partial t} g_{12}(t) + K_{13} g_{32}(t) + \int d\tau v_{13}(t-\tau) g_{32}(\tau) = -\delta(t) \delta_{12} . \quad (2.4.2)$$

Die opt. Modellwellenfunktion (2.1.8), transformiert in die zeitliche Darstellung, erfüllt somit nach Fouriertransformation von (2.1.9) die Gleichung

$$i \frac{\partial}{\partial t} \varphi_{k^{(2)}}(r, t) = - \frac{\nabla^2}{2m} \varphi_{k^{(2)}}(r, t) + \int d^3r' \int d\tau v(r, r', t - \tau) \varphi_{k^{(1)}}(r', \tau) . \quad (2.4.3)$$

Zur Ableitung der Dispersionsbeziehung für v (siehe z.B. Lip 66) benötigt man zwei Voraussetzungen:

- 1) In Gleichung (3) wird v als kausal angenommen, d.h.
 $v(t - \tau) = 0$ für $t - \tau < 0$ ($\varphi(t)$ hängt nur von $\varphi(\tau)$ mit $\tau < t$ ab!)
- 2) Die Fouriertransformierte $v(E)$ hat für $E \rightarrow \infty$ einen endlichen Grenzwert v^0 . Aus Gleichung (2.3.4) erkennt man, da die analytische Fortsetzung der Fouriertransformierten des Terms $v^{(2)} R^{(3)} v^{(2)}$ prop. $1/z$ gegen Null geht, daß $v^0 = v^{HF}(E) = v^{HF}$ gilt. Mit $v^{HF}(t) = v^{HF} \delta(t)$ folgt

$$v(t) = v^{HF} \delta(t) + v'(t) \Theta(t) , \quad (2.4.4)$$

$$v(E) = v^{HF} + \int_0^\infty v'(t) e^{iEt} dt := v^{HF} + v'(E) .$$

Wegen der Kausalität ($t \geq 0$) kann $v(E)$ analytisch in die obere Halbebene fortgesetzt werden. $v(z)$ hat Pole sowie einen Schnitt nur auf der reellen Achse

$$v(E) = v^{HF} + \sum_i \frac{V_i}{E - E_i} + \tilde{v}(E), \quad \tilde{v}(E) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \tilde{v}(E + i\epsilon) . \quad (2.4.5)$$

$v(z)$ ist Null für $z \rightarrow \infty$. Schreibt man nun die Cauchy-Relation für $v(E)$ auf,

$$\tilde{v}(E) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{v}(E')}{E' - E - i\epsilon} dE' , \quad (2.4.6)$$

und folgt der Argumentation von Lipperheide (Lip66), so erhält man nach kurzer Rechnung folgende Dispersionsbeziehung:

$$\operatorname{Re} v(E) = v^{HF} + \sum_i \frac{V_i}{E - E_i} + \frac{1}{\pi} P \int_{E_i}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} v(E')}{E' - E} dE' \quad (2.4.7)$$

ϵ_1 ist die Reaktionsschwelle (Für Einschußenergien $< \epsilon_1$ erfolgt nur elastische Streuung, so daß $\operatorname{Im} v(E) = 0$ für $E < \epsilon_1$ gilt. Dies erkennt man formal an Gl.(2.3.18), da der Reaktionsquerschnitt für $E < \epsilon_1$ verschwindet. Sehr schön kann man die (7) entsprechende Dispersionsbeziehung für den Massenoperator der Kernmaterie zeigen (Lu61, Re64). In diesem Falle sieht man explizit, daß v^0 gleich dem üblichen Hartree-Fock-Potential ist. Geht man bei der Berechnung von V_{opt} für endliche Kerne von einem Thomas-Fermi-Modell aus, welches das Target als aus Kernmaterie variabler Dichte bestehend beschreibt, so wird $\epsilon_1 = 0$, und der Pol -Anteil von (7) verschwindet.

3. Zerlegung des Massenoperators nach Ordnungen inter- mediärer Kontinuumspropagatoren

3.1 Die Sechs-Punkt-Antwortfunktion. Erläuterung des Zer- legungsverfahrens nach g^C -Linien

Zu einer systematischen Untersuchung des Massenoperators, welcher ja für positive Energien, wie in 2.1 gezeigt wurde, mit dem verallgemeinerten optischen Potential V_{opt} identisch ist, ist die Theorie von Ethofer und Schuck (ES69) bzw. Winter (Wi72) besonders geeignet. Durch die Einführung der sogenannten Sechspunkt-Antwortfunktion $R^{(3)}$ (siehe A1,2) gelingt es nämlich, den Massenoperator in die symmetrische Gestalt (2.3.4) zu bringen, schematisch:

$$V = V^{4F} + V^R = -2i V^{(2)} g + V^{(2)} R^{(3)} V^{(2)}. \quad (3.1.1)$$

Die Funktion $R^{(3)}$ wird im Anhang 2 eingehender diskutiert. Dort werden auch verschiedene Integralgleichungen angegeben, denen $R^{(3)}$ genügt. Sie unterscheiden sich durch die freien Terme und die Wechselwirkungen: Man geht von Gleichung (A.2.8) (Wi72, Formel (2.10)) aus, schematisch (h = "hole", p = "particle"):

$$R_{pph}^{(3)} = g_h (g_p g_p - \widetilde{g_p g_p}) + g_h g_p g_p K_{pph}^{(3)} R_{pph}^{(3)}. \quad (3.1.2)$$

Die Aufspaltung der irreduziblen pph-Wechselwirkung $K^{(3)}$ in Zwei-Quasiteilchen-Wechselwirkungsterme plus effektive Drei-Quasiteilchen-Wechselwirkung ist durch (A.2.6) gegeben. Nimmt man, wie im Anhang 2 beschrieben, aus $K^{(3)}$ den durch K^{pp} bestimmten Anteil bzw. einen der beiden K^{ph} -Anteile heraus (A.2.12-13'), so erhält man die Gleichungen (A.2.15, 18, 18'), schematisch:

$$R_{pph}^{(3)} = g_h g_{pp}^{(2)} + g_h g_{pp}^{(2)} \cdot \frac{1}{2} K_{pph}^{(pp)} R_{pph}^{(3)}, \quad (3.1.3 a)$$

$$R_{pph}^{(3)} = -g_{p_1} L_{p_2 h_3} + \widetilde{g_{p_1} L_{p_2 h_3}} - g_{p_1} L_{p_2 h_3} K_{pph}^{(p_2 h_3)} R_{pph}^{(3)} \quad \text{b)}$$

(3.1.3)

$$= -g_{p_2} L_{p_1 h_3} + \widetilde{g_{p_2} L_{p_1 h_3}} - g_{p_2} L_{p_1 h_3} K_{pph}^{(p_1 h_3)} R_{pph}^{(3)} \quad \text{c)}$$

In den freien Termen sind hier jeweils zwei Quasiteilchen gekoppelt, während die dafür verantwortliche Wechselwirkung aus $K_{pph}^{(3)}$ herausgenommen wurde.

Zum Verständnis des weiter unten erörterten Zerlegungsprinzips der Sechspunkt-Antwortfunktion $R^{(3)}$ müssen folgende Definitionen eingeführt werden: Der Einteilchenpropagator g werde in einen diskreten und einen kontinuierlichen Anteil aufgespalten:

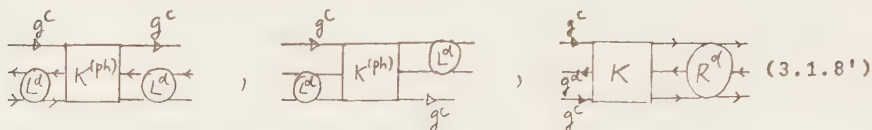
$$g_{11'} = g_{11'}^c + g_{11'}^d \quad (3.1.4)$$

Als Einteilchenbasis wähle man die Eigenzustände des verallgemeinerten Hartree-Fock-Hamilton-Operators $h_{11'}^{HF} = (p^2/2m)_{11'} + v_{11'}^{HF}$

$$h_{11'}^{HF} = e_i^{HF} \delta_{11'} \quad (3.1.5)$$

„Kontinuierliche“ Einteilchenzustände (Index „c“) sind die Streulösungen des hermiteschen Operators $h_{11'}^{HF}$ $|k^{(+)}\rangle^{HF}$ bzw. $|k^{(-)}\rangle^{HF}$. Eine im Folgenden durchgehend gemachte Annahme ist, daß man $g_{11'} = 0$ setzen kann, wenn 1 und 1' aus einem kontinuierlichen und einem diskreten Einteilchenzustand bestehen. D.h. es gelte

Nimmt man nur Terme mit einer einzigen g^C - Linie, so vernachlässigt man Beiträge der Gestalt



und höhere Terme in g^C (L^d und R^d werden unten definiert).

Geht man, ähnlich wie in der Mahaux-Weidenmüllerschen Schalenmodelltheorie der Kernreaktionen (MW69, GHW67) davon aus, daß Matrixelemente einer effektiven Zwei-Quasiteilchen-Wechselwirkung V_{1234}^{eff} mit je einem kontinuierlichen Index rechts und links („Kontinuum-Kontinuum-Wechselwirkung“) im Vergleich zu Matrixelementen mit weniger Kontinuum-Indices klein sind ($\sim 5\%$ der rein diskreten Matrixelemente, falls man von scharfen „shape resonances“, die vom Einteilchenpotential v^{HF} herrühren, absieht (GHW67)), genauer, daß es eine Hierarchie der Größenordnungen der Form $V_{\text{dddd}}^{\text{eff}}$, $V_{\text{dcdd}}^{\text{eff}}$, $V_{\text{dcdc}}^{\text{eff}}$ gibt, so kommt man zu folgendem Ergebnis: Terme wie (8') enthalten bereits mindestens eine Kontinuum-Kontinuum-Wechselwirkung bzw. zwei Diskret-Kontinuum-Wechselwirkungen. (Für V^{eff} ist dabei K^{ph} bzw. K^{pp} zu setzen; Matrixelemente der Dreiteilchenwechselwirkung K^{pph} werden ebenfalls als klein angenommen. Weiter unten werden neue wohldefinierte effektive Wechselwirkungen K^{phd} , K^{ppd} usw. eingeführt, für deren Matrixelemente obige Größenhierarchie ebenfalls vorausgesetzt wird). Bildet man nach Gleichung (1) den Massenoperator, so tritt (vgl. Abschn. 3.3) bereits bei dem Beitrag mit einer g^C -Linie rechts und links je eine Kontinuum-Kontinuum-Wechselwirkung auf. Die Entwicklung sollte also rasch konvergieren.

Im Folgenden werden die einzelnen Anteile, in die der Massenoperator durch die oben erklärte Zerlegung zerfällt, einzeln diskutiert. Dazu sind folgende Definitionen nötig: Um Schwierigkeiten mit den Austauschtermen der freien Propagatoren in den Gleichungen (1) und (3), $g_n \widetilde{g_p} g_p$ bzw. $\widetilde{g_p} L_{ph}$ zu vermeiden, setze man

$$R_{3'1/2 \ 1'2'3} := \bar{R}_{3'1/2 \ 1'2'3} - \bar{R}_{3'1/2 \ 1'2'3} \quad (3.1.9)$$

$R^{(3)}$ genügt dann folgenden Integralgleichungen ohne Austausch-
terme:

$$\bar{R}_{3'12'12'3} = g_{\alpha_3 3} g_{1\alpha_1} g_{2\alpha_2} (\delta_{\alpha_3 3'} \delta_{\alpha_1 1'} \delta_{\alpha_2 2'} + K_{\beta_3 \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2 \alpha_3} \bar{R}_{3'/\beta_3 1'2'/\beta_3}) \quad (3.1.10)$$

$$= -g_{1\alpha_1} L_{\alpha_3 2 \alpha_2 3} (\delta_{\alpha_3 3'} \delta_{\alpha_1 1'} \delta_{\alpha_2 2'} + K_{\beta_3 \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2 \alpha_3}^{(p_2 h_3)} \bar{R}_{3'/\beta_3 1'2'/\beta_3}) \quad (3.1.11)$$

$$= -g_{2\alpha_2} L_{\alpha_3 1 \alpha_1 3} (\delta_{\alpha_3 3'} \delta_{\alpha_1 1'} \delta_{\alpha_2 2'} + K_{\beta_3 \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2 \alpha_3}^{(p_1 h_3)} \bar{R}_{3'/\beta_3 1'2'/\beta_3}) \quad (3.1.11')$$

$g^{(2)d}$, L^d und R^d seien dann als diejenigen Propagatoren definiert, welche sich von denjenigen ohne Index „d“ dadurch unterscheiden, daß bei ihrer Berechnung ausschließlich diskrete g-Linien berücksichtigt werden:

$$L_{12'12'}^d = -g_{\alpha_1 1'}^d g_{\alpha_2 2'}^d (\delta_{\alpha_1 1'} \delta_{\alpha_2 2'} + i K_{\beta_1 \alpha_2 \alpha_1 \beta_2}^{ph} L_{1'2'12'}^d) \quad (3.1.12)$$

$$g_{12'12'}^d = g_{1\alpha_1}^d g_{2\alpha_2}^d (\delta_{\alpha_1 1'} \delta_{\alpha_2 2'} + i K_{\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2}^{pp} g_{1'2'12'}^d) \quad (3.1.13)$$

$$\bar{R}_{3'12'12'3}^d = g_{\alpha_3 3}^d g_{1\alpha_1}^d g_{2\alpha_2}^d (\delta_{\alpha_3 3'} \delta_{\alpha_1 1'} \delta_{\alpha_2 2'} + K_{\beta_3 \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2 \alpha_3} \bar{R}_{3'/\beta_3 1'2'/\beta_3}^d) \quad (3.1.14)$$

(vgl. (A.1.5,6), (10))

Dazu gibt es natürlich noch die adjungierten Gleichungen, die (A.1.11,12,19) entsprechen. Es ist nun leicht, mittels (7) und der im Anhang 2 angegebenen Verfahrensweise zu zeigen, daß mit (14) auch die (11) und (11') entsprechenden Gleichungen gelten, schematisch:

$$\bar{R}_{pph}^d = -g_p^d L_{ph}^d (1 + K_{pph}^{(ph)} \bar{R}_{pph}^d) \quad (3.1.15)$$

Ebenso gilt

$$R_{pph}^d = g_h^d g_{pp}^{(2)d} (1 + \frac{1}{2} K_{pph}^{(pp)} R_{pph}^d) \quad (\text{ohne Querstrich}) \quad (3.1.16)$$

(Es sei an dieser Stelle vermerkt, daß, falls man den Fall

$g^{cd}, g^{dc} \neq 0$ zulässt, nicht mehr so einfach von (14) auf (15) bzw (16) geschlossen werden kann: Dann gilt nämlich (7) nicht mehr. Man kann aber durch geeignete Definitionen von Wechselwirkungen $\bar{K}^{(ph)}$ bzw. $\bar{K}^{(pp)}$ zu (15) und (16) analoge Gleichungen mit $K \rightarrow \bar{K}$ bekommen. Im Folgenden wird (7) als gültig angenommen. Zu (15) und (16) gibt es natürlich je eine adjungierte Gleichung, bei der $\bar{R}^d$ bzw. R^d links von der zugehörigen Wechselwirkung steht.

3.2 Rein diskreter Beitrag zum resonanten Anteil v^R des Massenoperators

Nach (3.1.1) folgt für den Anteil von v^R , der ausschließlich diskrete Zwischenlinien g^d enthält, mit (3.1.14) und (A.2.4) sofort

$$v_{11'}^{(d)} = V_{1234} R_{2'344'3'2}^d V_{4'3'1'2'} \quad (3.2.1)$$

(Es ist $v^{(2)} R^{(3)} v^{(2)} = 2 v^{(2)} R^{(3)} v^{(2)}$ wegen (3.1.9) und der Antisymmetrie von $v^{(2)}$. Analoges gilt natürlich mit R^d und $\bar{R}^d$.)

Zur Berechnung dieses Terms hätte man beispielsweise so vorzugehen: Man nehme als Näherung für $R^{(3)d}$ die Summe aller unverbundenen Anteile in der Entwicklung dieser Funktion nach Feynman-Graphen. Man erhält (J.Winter, private Mitteilung):

$$R_{3'1'2'3}^{d(disc)} = g_{121'2'}^d g_{3'3}^d - (g_{22'}^d L_{13'31'}^d + g_{12'}^d L_{23'32'}^d + 2 g_{11'}^d g_{22'}^d g_{3'3}^d) + (1' \leftrightarrow 2') \quad (3.2.2)$$

("disc" bedeute "disconnected"). Dieselbe Gleichung gilt natürlich auch für R^{disc} ohne die Indices "d". (2) setze man dann in (1) ein. Man erhält nach Fouriertransformation einen Beitrag $v^{R(disc)}(e_k)$ zum verallgemeinerten optischen Potential $V_{opt}(e_k)$ ($e_k = k/2m$). Dieser hat genau die Gestalt, die bei Vinh-Mau angegeben wird (VM70), mit dem Unterschied, daß L^d und $g^{(2)d}$ mit den exakten Wechselwirkungen K^{ph} bzw. K^{pp} berechnet sind. Nur beschränkt man sich hier auf diskrete Einteilchenzustände. Betrachtet man beispielsweise die Streuung an einem dop-

pelt-magischen Kern wie Blei, ^{208}Pb , so erhält man im Prinzip L^d durch eine normale RPA-Rechnung, $g^{(2)d}$ durch eine Teilchen-Teilchen- bzw. Loch-Loch-RPA-Rechnung im Unterraum der diskreten Zustände. In der Sprechweise von Mahaux-Weidenmüller (MW69) entsprechen die Terme (2) in etwa den „bound states embedded in the continuum“.

3.3 Beiträge mit einer g^C -Linie

Um die Beiträge zu $R^{(3)}$ mit einer g^C -Linie zu erhalten, werde hier eine etwas heuristische Überlegung angestellt (die exakte, aber umständliche Rechnung liefert dasselbe Ergebnis und ist im Anhang 6 angegeben): Man gehe von den Gleichungen (3.1.11, 11') aus. Zuerst nehme man (3.1.11) und bestimme damit alle Beiträge zu R mit einer g_1^C -Linie, wobei die „Teilchen“ 2 und 3 zu einem diskreten Phonon L_{23}^d koppeln. Dazu addiere man die Beiträge mit einer g_2^C -Linie, die man mittels Gleichung (3.1.11') bekommt. Der gesuchte Beitrag zu $\bar{R}$ mit einer g^C -Linie sei $\bar{R}^C$. Dann gilt also

$$\bar{R}^C = \bar{R}_1^C + \bar{R}_2^C \quad (3.3.1)$$

Mittels (3.1.11, 15) läßt sich R_1^C leicht bestimmen ($\bar{R}^d = \bar{R}_1^d = \bar{R}_2^d$):

$$\bar{R}_1^C = -g_1^C L_{23}^d - g_1^C L_{23}^d K^{(p_2 h_3)} \bar{R}^d - g_1^C L_{23}^d K^{(p_2 h_3)} \bar{R}^C \quad (3.3.2)$$

$$\text{Es folgt: } (1 + g_1^C L_{23}^d K^{(p_2 h_3)}) \bar{R}_1^C = -g_1^C L_{23}^d (1 + K^{(p_2 h_3)}) \bar{R}^d \quad (3.3.3)$$

Mit Hilfe vom (3.1.15) und der dazu adjungierten Gleichung bekommt man

$$(1 + g_1^d L_{23}^d K^{(p_2 h_3)})^{-1} = 1 + \bar{R}^d K^{(p_2 h_3)} \quad (3.3.4)$$

und man endet bei dem Resultat

$$\bar{R}_1^c = (1 + \bar{R}^d K^{(Ph_3)}) (-g_1^c L_{23}^d) (1 + K^{(Ph_3)} \bar{R}^d) \quad (3.3.5)$$

Analog folgt

$$\bar{R}_2^c = (1 + \bar{R}^d K^{(Ph_3)}) (-g_2^c L_{13}^d) (1 + K^{(Ph_3)} \bar{R}^d) \quad (3.3.5')$$

Der Beitrag von $\bar{R}^c$ zum Massenoperator sei $v^{(c)}$. Nach (A.2.2-4) lautet er aufgrund der Antisymmetrie von $V^{(2)}$ und der Definition (3.1.9) von R:

$$v^{(c)} = V^{(2)} R^c V^{(2)} = 2 V^{(2)} \bar{R}^c V^{(2)}. \quad (3.3.6)$$

Hier ist (1) einzusetzen unter Verwendung von (5) und (5'). Das Ergebnis lautet mit allen Indices:

$$\begin{aligned} v_{44'}^{(c)} = \frac{1}{2} \{ & (2 V_{4\beta_3\beta_2\beta_1} + V_{4321} R_{\alpha_3'12\alpha_1'\alpha_2'}^d K_{\beta_3'\alpha_2'\alpha_1'\beta_2\beta_3}^{(Ph_3)}) (-g_{\beta_1\beta_1'}^c L_{\alpha_3'\beta_2'\alpha_2'\beta_3}^d) \cdot \\ & \cdot (2 V_{\beta_1\alpha_2'\alpha_3'4} + K_{\delta_3\beta_1'\alpha_2'\gamma_1\delta_2\alpha_3'}^{(Ph_3)} R_{\gamma_1'\delta_1'\delta_2'1'2'\gamma_3}^d V_{1'2'3'4'}) + \\ & + (2 V_{4\beta_3\beta_2\beta_1} + V_{4321} R_{\alpha_3'12\alpha_1'\alpha_2'}^d K_{\beta_3'\alpha_2'\alpha_1'\beta_2\beta_3}^{(Ph_3)}) (-g_{\beta_2\beta_2'}^c L_{\alpha_3'\beta_1'\alpha_1'\beta_3}^d) \cdot \\ & \cdot (2 V_{\alpha_2'\beta_1'\alpha_3'4'} + K_{\gamma_3\alpha_2'\beta_2'\gamma_1\gamma_2\alpha_3'}^{(Ph_3)} R_{\gamma_1'\delta_1'\delta_2'1'2'\gamma_3}^d V_{1'2'3'4'}) \} \quad (3.3.7) \end{aligned}$$

Es wurde berücksichtigt, daß $2V\bar{R}^d = VR^d$ gilt. Die Klammern $(2V^{(2)} + V^{(2)} R^{(3)} d_{pph}^{(ph)})$ bzw. $(2V^{(2)} + K_{pph}^{(ph)} R^{(3)} d_V^{(2)})$ ergeben Beiträge zur irreduziblen Teilchen-Loch-Wechselwirkung K^{ph} . Dies erkennt man durch Vergleich mit den Formeln (A.3.3, 3', 5, 5') aus dem Anhang. $R^{(3)}$ ist dort nur durch $R^{(3)d}$ zu ersetzen, um ob-

ge Klammern zu erhalten. Man definiert also

$$K_{\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2}^{phd} = 2 V_{\alpha \rho_2 \beta_1 \beta_2} + V_{\alpha_1 \delta_3 \delta_2 \delta_1} R_{\delta_3 \delta_2 \gamma_1 \gamma_2 \delta_3}^d K_{\alpha_2 \gamma_1 \delta_2 \beta_2 \beta_1 \delta_3}^{(P_{113})} \quad (3.3.8)$$

Mittels (A.3.3,5,5') folgen drei äquivalente Definitionen, die hier nicht explizit angeschrieben werden. Ganz entsprechend definiert man die Wechselwirkung K^{ppd} mittels (A.3.1,2,1',2').

Im Anhang 5 wird gezeigt, daß für K^{phd} unter der Voraussetzung (3.1.6), d.h. $g^{cd} = g^{dc} = 0$ die Identität

$$K_{\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2}^{phd} = W_{\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2}^d + i K_{\alpha_1 \alpha_2 \gamma_1 \gamma_2}^{pp} g_{\gamma_1 \gamma_2 \delta_1 \delta_2}^d P_{\alpha_1 \beta_1} K_{\delta_1 \delta_2 \beta_2 \beta_1}^{ppd} - \\ - i P_{\alpha_1 \beta_1} K_{\alpha_1 \gamma_1 \beta_2 \gamma_2}^{phd} L_{\delta_2 \delta_1 \gamma_1 \gamma_2}^d K_{\delta_2 \alpha_2 \delta_1 \beta_1}^{ph} \quad (3.3.9)$$

gilt mit

$$W_{\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2}^d = 2 V_{\alpha \rho_2 \beta_1 \beta_2} + K_{\delta_2 \alpha_1 \alpha_2 \delta_1 \delta_2 \beta_1}^{pph} R_{\delta_3 \delta_2 \delta_1 \gamma_1 \gamma_2 \delta_3}^d V_{\gamma_1 \gamma_2 \delta_3 \beta_2} \quad (3.3.9')$$

Nach (ES69, S.273u.) ist W irreduzibel sowohl im Teilchen-Teilchen-Kanal als in den beiden Teilchen-Loch-Kanälen. P_d projiziert auf diskrete Einteilchenzustände i (vgl. (3.1.7)).

Mit Hilfe der Definition (8) kann der Ausdruck $v^{(c_1)}$, Gleichung (7), folgendermaßen zusammengefaßt werden (beide Summanden ergeben den gleichen Beitrag, wie man mit den Formeln aus Anhang 3 oder mit (A.2.13) leicht beweist):

$$\gamma_{\beta_1 \beta_1'}^{(c_1)} = K_{\beta_1 \alpha_1' \beta_1'}^{phd} (-g_{\alpha_1' \alpha_1'}^c L_{\alpha_1' \beta_1' \beta_1' \alpha_1'}^d) K_{\beta_1' \alpha_1' \alpha_1' \beta_1'}^{phd} \quad (3.3.10)$$

(Macht man eine statische Näherung für K^{phd} und führt eine Fouriertransformation durch, so erhält man den doppelten Brenig'schen Massenoperator (Br67, Formel 40)).

3.4 Diskussion höherer Beiträge; graphische Veranschaulichung einiger Gleichungen

Im Anhang 7 werden die Beiträge zu v^R mit zwei g^C -Linien berechnet. Das Ergebnis sei $v^{(c_2)}$:

$$v^{(c_2)} = K^{phd} \left(-\frac{1}{2} g_1^c g_2^c g_3^d - g_1^c L_{23}^{c_1} - g_1^c L_{23}^d K_{123}^{(23)} \bar{R}_{123}^c - \right. \\ \left. - L_{23}^d K_{23}^{ph} g_2^c g_1^c g_3^d K_{13}^{ph} L_{13}^d \right) K^{phd}, \quad (3.4.1)$$

wobei $\bar{R}^c$ durch (A.6.7) und L^c durch (A.7.5) gegeben sind. Eine Untermenge der Beiträge zu $v^{(c_2)}$ sind alle diejenigen Terme, die zwei gleichzeitig vorkommende g^C -Linien enthalten; diese seien gleich $\hat{v}^{(c_2)}$. Nach (A.7.13,13') gilt:

$$\hat{v}_{11'}^{(c_2)} = K_{1\alpha_3\alpha_1\alpha_2}^{ppd} g_{\beta_3\alpha_3}^d g_{\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2}^{cc} K_{\beta_1\beta_2\beta_3}^{ppd}. \quad (3.4.2)$$

g^{cc} sind alle Beiträge zu $g^{(2)}$ mit zwei gleichzeitigen g^C -Linien.

Gleichung (1) ist schon sehr unübersichtlich. In diesem Zusammenhang wichtig ist lediglich die Tatsache, daß man unter der Voraussetzung der in Abschnitt 3.1 erläuterten Größenhierarchie der Matrixelemente effektiver Wechselwirkungen aus (1) bzw. (2) erkennen kann, daß diese Terme um eine Größenordnung kleiner sein sollten als die in Abschnitt 3.3 behandelten Beiträge mit einer g^C -Linie. Eine genauere Erörterung der Größenordnungen der verschiedenen Terme erfolgt in Abschnitt 3.6 zusammen mit der Diskussion der Ergebnisse von 3.5.

Auf einfache Weise kann ein spezieller Beitrag zu v^R angegeben werden, der unendlich viele g^C -Linien enthält: Dabei gehe man von Gleichung (A.2.15) bzw. (3.1.3 a) aus. Unter der Annahme, daß $R_{3,12,1'2,3}$ für kontinuierliche Indices 1,2,1',2' im wesentlichen nur kontinuierliche Teilchen-Zwischenlinien enthält, daß Teilchen im Kontinuum mit Löchern nicht wechselwirken und die Dreiteilchenwechselwirkung K^{pph} vernachlässigt werden kann, bleibt nur der erste Term von (A.2.15) übrig, d.h.

$$P_{c_1} P_{c_2} P_{c_1'} P_{c_2'} R_{3'12'1'2'3} \approx P_{c_1} P_{c_2} P_{c_1'} P_{c_2'} g_{3'3} g_{12'1'2'} \quad (3.4.3)$$

$$\Leftrightarrow P_{c_{12}} R_{3'12'1'2'3} P_{c_{1'2'}} \approx g_{3'3} P_{c_{12}} g_{12'1'2'} P_{c_{1'2'}} \quad (3.4.3')$$

Dies ergebe den Beitrag $\bar{v}^{(c)}$ zu v^R :

$$\bar{v}_{11'}^{(c)} = V_{1\alpha_3\alpha_1\alpha_2} g_{\beta_3\alpha_3} P_{c_{\alpha_1\alpha_2}} g_{\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2} P_{c_{\beta_1\beta_2}} V_{\beta_1\beta_21'\beta_3} \quad (3.4.4)$$

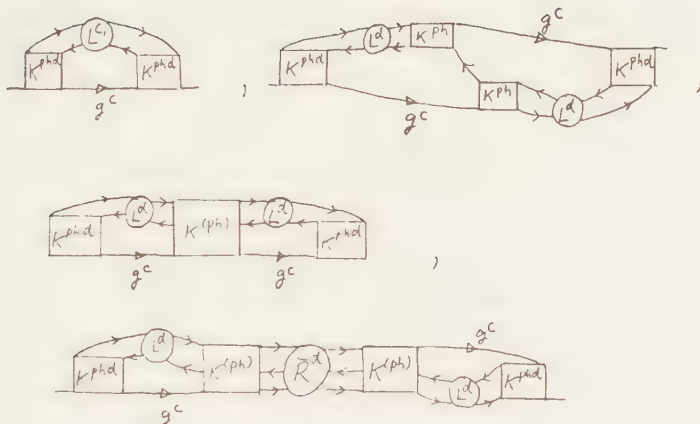
d.h. die Summation geht hier nur über kontinuierliche Zustände $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$. Weitere Terme mit einer vorgegebenen Anzahl von g^c -Linien zu berechnen ist zwar im Prinzip möglich, aber äusserst umständlich; die ganze Zerlegung von v^R nach der in 3.1-4 erläuterten Methode ist also nur sinnvoll, wenn sie nach dem Term (3.3.10) abgebrochen werden kann.

Nun sollen die wichtigsten Beiträge zu v^R graphisch veranschaulicht werden. Der Vollständigkeit halber seien zuvor die beiden Bethe-Salpeter-Gleichungen (A.1.5,6) sowie die Integralgleichung (A.2.6) für $R^{(3)}$ graphisch angegeben:

$$L = - \text{crossed diagram} - \text{diagram with K box} \quad (3.4.5)$$

$$G = \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram with K box} \quad (3.4.6)$$

$$R = \text{diagram 1} + \text{diagram with K^{(1)} box} \quad (3.4.7)$$



(3.4.13)

und weitere. Der erste und zweite dieser Beiträge sind in (12) enthalten, da dies Terme mit zwei gleichzeitig vorkommenden g^c -Linien sind. Die anderen Ausdrücke beinhalten die Streuung eines Teilchens im Kontinuum an einem „diskreten Phonon“.

3.5 Der Imaginärteil verschiedener Terme von V_{opt} ; Vergleich mit dem Ergebnis aus 2.3

In diesem Abschnitt wird der Imaginärteil der wichtigsten Terme der im vorliegenden Kapitel 3 behandeltem Zerlegung des Massenoperators gebildet und mit dem aus dem optischen Theorem folgenden allgemeinen Ergebnis (2.3.18,18') verglichen. Die Theorie der inelastischen Nukleonenstreuung im Formalismus der Greenschen Funktionen (siehe z.B. Em71), die dazu benötigt wird, ist im Anhang 4 zusammengestellt. Untersucht werden die Ausdrücke $v^{(d)}$ ((3.2.1), graphisch (3.4.8)), v^{c1} ((3.3.10), graphisch (3.4.9)) und $v^{(c)}$ ((3.4.4), graphisch (3.4.10)). Sie müssen zunächst einer Fouriertransformation unterzogen werden, da man ja $\text{Im } v(e_k)$ benötigt:

$$v_{ii'}(e) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{ie(t, t')} v_{ii'}(t, t') d(t, t') \quad (3.5.1)$$

Für die verschiedenen betrachteten Terme ergibt sich:

$$v_{11'}^{(d)}(e) = V_{1234} R_{2'34}^d(e) V_{4'3'1'2'} \quad (3.5.2)$$

$$v_{\beta_1\beta_1'}^{(c)}(e) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon_1 d\omega_2 d\omega_2' K_{\beta_1\alpha_2\alpha_1\beta_2}^{phd}(e, \omega_2 - \frac{\varepsilon_1}{2}; e - \varepsilon_1, \omega_2 + \frac{\varepsilon_1}{2}) g_{\alpha_1\alpha_1'}^c(e - \varepsilon_1) \cdot \\ \cdot R_{\beta_2\alpha_2'\alpha_2\beta_2'}^d(\omega_2 + \frac{\varepsilon_1}{2}, \omega_2' - \frac{\varepsilon_1}{2}; \omega_2 - \frac{\varepsilon_1}{2}, \omega_2' + \frac{\varepsilon_1}{2}) \cdot K_{\alpha_1'\beta_2'\beta_1'\alpha_2'}^{phd}(e - \varepsilon_1, \omega_2' + \frac{\varepsilon_1}{2}; e, \omega_2' - \frac{\varepsilon_1}{2}), \quad (3.5.3)$$

$$\tilde{v}_{\alpha_4\beta_4}^{(c)}(e) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon' V_{\alpha_4\alpha_3\alpha_2\alpha_1}^P g_{\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2}(e') \frac{P}{\varepsilon_{\alpha_2\alpha_1}} g_{\beta_3\alpha_3}^c(e' - \varepsilon') V_{\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4} \quad (3.5.4)$$

Bei der Ableitung von Gleichung (3) wurden die Definitionen (A.4.11-13) verwendet.

Zunächst werde der Imaginärteil von $v^{(d)}$, (2), gebildet: Da R^d nach (3.1.9,14) nur diskrete Indices enthält, kann es nur diskrete Pole haben; die Berechnung von R^d sollte z.B. nach dem bei Winter (Wi72) angegebenen Verfahren (vgl. auch SVR73) durchgeführt werden. $R_{3'12'1'2'3}^d$ hat die Struktur

$$R_{3'12'1'2'3}^d = \sum_{\nu} \frac{S_{123}^{d\nu} S_{1'2'3'}^{d\nu*}}{e - e_{\nu} + i\varepsilon} + \sum_{\mu} \frac{S_{123}^{d\mu} S_{1'2'3'}^{d\mu*}}{e + e_{\mu} - i\varepsilon} \quad (3.5.5)$$

wobei e_{ν} bzw. e_{μ} diskrete Energien sind: Es handelt sich um die pph- bzw. hhp-Doorway-Zustände in einer diskreten Näherung. Der Imaginärteil von $v_{1,1'}^{(d)}(e_k)$ ist also gegeben durch

$$\text{Im } v_{11'}^{(d)}(e_k) = -\pi \sum_{\nu} |V_{1234} S_{342}^{d\nu}|^2 \delta(e_k - e_{\nu}) \quad (3.5.6)$$

Da dies eine diskrete Summe von δ -Termen ist, liefert sie einen etwas unphysikalischen, weil unstetigen Beitrag. Für hohe Energien verschwindet er, weil die Energien e_{ν} von diskreten pph-Zuständen eine obere Schranke haben. Erst die Kopplung von R^d an das Kontinuum bewirkt über den Schnitt von $g^c(e)$, daß man

einen stetigen Imaginärteil bekommt. Diese Kopplung ist in dem Term $v^{(c_1)}$ enthalten: Aus (3.4.11') z.B. erkennt man, daß $v^{(c_1)}$ Bestandteile der Art



hat und andere, die zusammen die symmetrische Form (3.4.9) ergeben. Prozesse der Art



bedeuten, daß das einfallende Teilchen direkt in ein Streuteilchen und eine Anregung des Targets übergeht, die linke Seite von (7) beschreibt hingegen einen Prozeß, bei dem zunächst ein diskreter Doorway-Zustand angeregt wird, der über „Restwechselwirkungen“, die in $K^{(ph)}$ enthalten sind, weiter zerfällt.

Die Berechnung des Imaginärteiles von $v^{(c_1)}(e)$ bereitet Schwierigkeiten, die ohne vernünftige Näherungsannahmen kaum zu überwinden sind. Zunächst wird angenommen, daß $R^{(2)d}$ aus Gleichung (3), (welches aus L^d durch Abspalten einer Delta-Funktion, die die Energieerhaltung ausdrückt, hervorgeht (siehe (A.4.12)) durch das exakte $R^{(2)}$ mit diskreten Indices ersetzt werden kann:

$$R^{(2)d} \approx P_d R^{(2)} P_d \quad (3.5.9)$$

Das bedeutet, daß man Kontinuum-Zwischenlinien in $R^{(2)}$ zulässt, die nach den allgemeinen Annahmen dieses Kapitels einen Effekt höherer Ordnung ausmachen. Für die intermediäre g^c -Linie in (3) wird die Hartree-Fock-Näherung eingesetzt:

$$g_{\alpha, \alpha'}^c(e_h) \cong \sum_{h'} \frac{\langle \chi_1 | h' \rangle \langle h'' | \chi_1' \rangle}{e_h - e_{h'} + i\epsilon} \quad (3.5.10)$$

Die Spektralzerlegung von $P_d R^{(2)} P_d$, Gleichung (9), ist im wesentlichen durch (A.4.7) gegeben: Mit (A.4.9) ist $R^{(2)} = g^{(2)} - gg$. Der gg -Term subtrahiert genau den Grundzustandsbeitrag zur ersten eckigen Klammer von (A.4.7). Es wird nun angenommen, daß nur diese zu (3) einen entscheidenden Beitrag gibt. Sie ist nämlich derjenige Anteil von $g^{(2)}$, der die Teilchen-Loch-Bewegung in dem Kanal beschreibt, bezüglich dessen K^{phd} irreduzibel ist. (Vgl. dazu die graphischen Darstellungen (3.4.5,9)). Diese Klammer wird nun, zusammen mit (10) in (3) eingesetzt. In abgekürzter Schreibweise gilt dann:

$$\begin{aligned} \text{Im } v_{\beta, \beta'}^{(c)}(e) &= \text{Im} \left\{ \sum_{s \neq 0} \frac{i}{(2\pi)^3} \int d\varepsilon \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2} + d\omega_2} K_{\dots}^{phd}(e, \omega_2, \varepsilon) \langle \alpha_1^c | h^{(c)} \rangle^{HF} \tilde{\chi}_{\dots}^{sd}(\varepsilon, \omega_2) \right. \\ &\cdot \frac{1}{(e - \varepsilon_1 - e_{\varepsilon'} + i0)(\varepsilon_1 - \varepsilon'_s + i0)} \int d\omega'_2 \chi_{\dots}^{sd}(\omega'_2, \varepsilon_1) \langle h^{(c)} | \alpha_1^c \rangle^{HF} K_{\dots}^{phd}(\varepsilon_1, \omega'_2, e) - \\ &- \int d\omega_2 K_{\dots}^{phd}(e, \omega_2, \varepsilon_1) \langle \alpha_1^c | h^{(c)} \rangle^{HF} \tilde{\chi}_{\dots}^{sd}(\varepsilon_1, \omega_2) \cdot \frac{1}{(e - \varepsilon_1 - e_{\varepsilon'} + i0)(\varepsilon_1 + \varepsilon'_s - i0)} \cdot \\ &\left. \cdot \int d\omega'_2 \tilde{\chi}_{\dots}^{sd}(\omega'_2, \varepsilon_1) \langle h^{(c)} | \alpha_1^c \rangle^{HF} K_{\dots}^{phd}(\varepsilon_1, \omega'_2, e) \right\}. \quad (3.5.11) \end{aligned}$$

("c", "d" bedeutet: Summation nur über kontinuierliche bzw. diskrete Indices).

Nun weiß man, da ja die exakte Relation (2.3.18) gilt und wegen

$$G_R(\frac{1}{2}) \propto \sum_{f \text{ ind.}} |T_{fi}|^2 \delta(e_k - e_f), \quad (3.5.12)$$

daß die Diagonalelemente des Imaginärteils des exakten $v_{\text{opt}}^A(e_k) = v(e_k)$,

$$\text{Im } v(e_k) = \text{Im } v^R(e_k) = \text{Im } V^{(2)} R^{(3)}(e_k) V^{(2)}, \quad (3.5.13)$$

entsprechend (12) die symmetrische Form $\mathcal{M} v(e_k) = \sum \delta(e_k - e_f) |A_{kf}|^2$ haben. Da die Näherungsausdrücke $v^{(d)}$, $v^{(c_1)}$ und $v^{(c)}$ alle ebenfalls symmetrische Ausdrücke sind, wird in Analogie angenommen, daß in (11) die ω_z - bzw. ω'_z -Integrale zusammen mit der ϵ_i -Integration ungefähr konjugiert komplexe Größen ergeben. Die Energienenner in (11) können nämlich in einen ϵ_i -unabhängigen und einen ϵ_i -abhängigen Term aufgespalten werden:

$$\frac{-i}{(e - \epsilon_i - e_{k'} + i0)(\epsilon_i - \epsilon'_S + i0)} = \frac{1}{e - e_{k'} - \epsilon'_S + 2i0} + i \left(\frac{1}{\epsilon_i - \epsilon'_S + i0} + \frac{1}{e - \epsilon_i - e_{k'} + i0} \right) \quad (3.5.14)$$

Die Klammer ist

$$f(\epsilon_i, \epsilon'_S, k') =: \pi (\delta(\epsilon_i - \epsilon'_S) + \delta(e - \epsilon_i - e_{k'})) - i \left(\frac{P}{\epsilon_i - \epsilon'_S} - \frac{P}{\epsilon_i - (e - e_{k'})} \right) \quad (3.5.14')$$

Obige Annahme lautet also

$$\int d\epsilon_i f(\epsilon_i, \epsilon'_S, k') [\int d\omega_2 \dots] [\int d\omega'_2 \dots] \approx |A(\epsilon'_S, k')|^2 \quad (3.5.15)$$

Unter dieser Voraussetzung folgt für den Imaginärteil von $v^{(c_1)}$ sofort wegen $(e - e_{k'} - \epsilon'_S + i0)^{-1} = -i\pi \delta(e - e_{k'} - \epsilon'_S) + P/(e - e_{k'} - \epsilon'_S)$ das Ergebnis (vgl. (A.4.23))

$$\langle k^{(c)} | \mathcal{M} v^{(c_1)}(e_k) | k^{(c)} \rangle \cong -\pi \sum_{\alpha, \beta} \left| \int \frac{d\omega_2}{2\pi} K_{\alpha, \beta}^{phd}(\epsilon'_S, \omega_2 + \frac{\epsilon'_S}{2}, e_k, \omega_2 - \frac{\epsilon'_S}{2}) \right|^2 \delta(e_k - e_{k'} - \epsilon'_S) \quad (3.5.16)$$

Bis auf die Ersetzung $K^{ph} \rightarrow K^{phd}$, $|k^{(-)} \rangle \rightarrow |k^{(-)} \rangle_{HF}$ und die Tatsache, daß die Summation nur über diskrete Zustände S_A

geht (dies wird durch den Projektionsoperator $P_{d_{\alpha_1 \beta_2}}$ deutlich), erkennt man durch Vergleich mit (A.4.23), daß (16) in der Tat einen Beitrag zum totalen Wirkungsquerschnitt gibt: Es liefert, falls die genannten Ersetzungen Effekte höherer Ordnung darstellen, ungefähr den totalen inelastischen Wirkungsquerschnitt:

$$\text{Im} \langle k^{(4)} | v^{(c)}(e_k) | k^{(4)} \rangle \cong - \frac{k^2}{2m} \sigma_{\text{inel.}}(k) \quad (3.5.17)$$

Schließlich bleibt noch $\text{Im} \bar{v}^{(c)}(e_k)$ nach Gleichung (4) zu berechnen: Diesen Term bekommt man leicht, weil $v^{(2)}$ nicht von der Energie abhängt. Man erhält nach kurzer Rechnung:

$$\begin{aligned} \text{Im} \langle k^{(4)} | \bar{v}^{(c)}(e_k) | k^{(4)} \rangle &= \\ &= -\pi \sum_{\substack{A+2 \\ S_{A+2}}} \left\{ P_c V_{\alpha_1 \alpha_2}^{(1)} \langle 0_A | a_{\alpha_1} a_{\alpha_2} | S_{A+2}^{(-)} \rangle \right\} \sum_{\beta_3}^{(-)} \left(\frac{E_{A+2}}{E_A} \right) \left(c_A - c_c \right) \cdot \left\{ \alpha_1 \leftrightarrow \beta_3 \right\}^* \end{aligned} \quad (3.5.18)$$

$S^{(-)}$ (der Lochanteil der Einteilchen-Spektralfunktion, vgl. z.B. GL70, Ba70) ist gegeben durch

$$S_{11'}^{(-)}(e) = \sum_{|t_{A-1}\rangle} \langle 0_A | a_{\alpha'}^\dagger | t_{A-1} \rangle \delta(e + E_{t_{A-1}} - E_{0_A}) \langle t_{A-1} | a_1 | 0_A \rangle \quad (3.5.19)$$

Die Summation in (18) geht über die Kontinua des (A+2)-Teilchen-Systems. Wegen des Faktors $\langle 0_A | a_{\alpha_1} a_{\alpha_2} | S_{A+2}^{(-)} \rangle$ sind dies die Zweiteilchenkontinua: Diejenigen mit zwei unkorrelierten Teilchen im Kontinuum (Endprodukte einer Knock-out-Reaktion) und das Deuteronkontinuum, welches die Endkonfigurationen der Pick-up-Prozesse emthält. Der Wirkungsquerschnitt für die Pick-up-Reaktion z.B. lautet in DWBA-Näherung (J.Winter, private Mitteilung)

$$\begin{aligned} - \frac{k^2}{2m} \sigma^{(c)}(k) &= \sum_{\substack{\alpha' \\ | \phi_{\alpha'}^{(-)} \rangle}} \left\{ \langle \phi_{\alpha'}^{(-)} | \alpha_1 \alpha_2 \rangle V_{\alpha_1 \alpha_2} \alpha_3 \alpha_4 \langle \alpha_3 | k^{(4)} \rangle \right\} \cdot \\ &\cdot S_{\alpha \alpha'}^{(-)}(e_{k_{\text{in Deut.}}} - e_{B_{\text{Deut.}}} - e_k) \{ \alpha \leftrightarrow \alpha' \}^* \end{aligned} \quad (3.5.20)$$

Wenn man, analog zur Definition der optischen Modellwellenfunktion für Nukleonen, (2.1.7), diejenige für Deuteronen durch

$$\langle \tau_1, \tau_2 | \phi_d^{(-)} \rangle := \langle 0_A | a_{\tau_1} a_{\tau_2} | S_{A+2}^{(-)} \rangle_{\text{Deuteron}} \quad (3.5.21)$$

definiert, so ist (20) mit (18) außer der Projektion auf kontinuierliche Einteilchenzustände α_1, α_2 in (18) identisch. Nimmt man an, daß die Beiträge von gebundenen Einteilchenzuständen α_1, α_2 zur Deuteron-Streuwellenfunktion gering sind, so gilt also

$$\mathcal{M} \langle h_1^{(1)} | \tilde{V}^{(c)}(e_{h_2}) | h_2^{(1)} \rangle \approx -\frac{\hbar^2}{2m} (\mathcal{G}_{\text{knock-out}}^{(c)}(h_2) + \mathcal{G}_{\text{pick-up}}^{(c)}(h_2)) \quad (3.5.22)$$

Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, daß $v^{(d)}$ einen Beitrag $v^{(2)} \frac{1}{2} d v^{(2)}$ enthält. Dieser liefert einen Teil der Korrekturen, die von gebundenen Einteilchenzuständen herrühren.

3.6 Zusammenfassung und Diskussion

Die in 3.1-4 beschriebene Zerlegung des optischen Potentials nach Ordnungen intermediärer Kontinuumpropagatoren lieferte drei wichtige Terme: Der erste, $v^{(d)}$, enthält nur diskrete Zwischenlinien. Der zweite, $v^{(c_1)}$, besteht aus der Summe aller Graphen mit einer einzigen Kontinuumslinie, während der dritte, $\hat{v}^{(c)}$, einen Teil der Graphen zu v^R aufsummiert, bei dem das Kontinuum in allen Ordnungen innerhalb des Zweiteilchenpropagators berücksichtigt wird. Es wurde angenommen, daß mit diesen drei Termen der Hauptbeitrag zum dispersiven Anteil v^R des Massenoperators ausgeschöpft ist. Als Test wurde im letzten Abschnitt, 3.5, der Imaginärteil von $v^{(d)}$, $v^{(c_1)}$ und $\bar{v}^{(c)}$ gebildet und mit der aus dem optischen Theorem folgenden allgemeinen Beziehung (2.3.18) verglichen. Es stellte sich heraus, daß $v^{(c_1)}$ ungefähr den inelastischen Wirkungsquerschnitt liefert (3.5.16,17) und $\bar{v}^{(c)}$ den Knock-

out- plus Pick-up-Wirkungsquerschnitt. Diese ungefähre Identifizierung ist ein starkes Argument dafür, daß die besprochene Zerlegung physikalisch sinnvoll ist. Leider steht der erste Term, $v^{(d)}$, einer vergleichbar einfachen Interpretation wie $v^{(c_1)}$ und $v^{(c)}$ nicht offen. Daß Im $v^{(d)}$ nach (3.5.6) eine diskrete Summe von Deltatermen ist, darf nicht verwundern: Dies Ergebnis folgt zwangsläufig aus der Natur der Zerlegung, weil die rein diskreten Propagatoren aufgrund der endlichen Zahl diskreter Einteilchenzustände eine endliche Zahl diskreter Pole besitzen, die man im Prinzip (Wi72) durch Lösung eines endlichen Matrixeigenwertproblems erhalten kann. Durch Hinzunahme des Kontinuums verschwinden die Deltasingularitäten: Die reellen Energien e_0 aus (3.5.5) werden ein wenig verschoben und bekommen zusätzlich einen endlichen Imaginärteil. Dieser Effekt wird durch die vernachlässigten Terme der Entwicklung nach g^C -Linien bewirkt und kann phänomenologisch dadurch erreicht werden, daß man in (3.5.5) io durch iI ersetzt, wobei I ein kleines endliches Intervall bedeutet. Eine physikalisch einfache Interpretation des Termes $v^{(d)}$ ist allerdings nicht möglich. Man kann ihn, wenn man gemäß (3.2.2) für $R^{(3)d}$ näherungsweise $R^{(3)disc}$, die Summe aller unverbundenen Anteile von $R^{(3)d}$, setzt, umformen in

$$v^{(d)} \approx V^{(2)} g^{(2)d} g^d V^{(2)} + [2V^{(2)}] (-g^d L^d) [2V^{(2)}] + [2V^{(2)}] g^d g^d [2V^{(2)}] \quad (3.6.1)$$

Man erkennt, daß $v^{(d)}$ Korrekturen zu $v^{(c)} = V^{(2)} P_{g^{(2)}} V^{(2)}$ und $v^{(c_1)} = K^{phd} (-g^d C^d) K^{phd}$ liefert. (Es ist $K^{phd} = 2V^{(2)C} + \dots$). $v^{(d)}$ hat also keine eindeutige physikalische Bedeutung; es ergänzt die beiden physikalisch interpretierbaren Terme und vervollständigt insgesamt die Zerlegung von v^R , trägt also auch zu den nicht berücksichtigten restlichen Reaktionsquerschnitten bei. Sicherlich beinhaltet er nicht die compound-elastische Streuung (dies wird in einer ähnlichen Theorie von Lev et al. (LBD74), welche die Doorwayzustände im Blei als Kopplung von Einteilchen-Schalenmodellzuständen an phänomeno-

logisch behandelte Vibrationen betrachtet, angenommen), sondern trägt zu den inelastischen Prozessen bei.

Eine Diskussion, wie Schwierigkeiten, die aufgrund des singulären Verhaltens von $V^{(2)}$ (hard core) auftreten, im Prinzip behebbar sind, wird im Anhang 7 gegeben: da man sich bei numerischen Rechnungen immer auf Einteilchenzustände eines Modellraums beschränkt, muß man den Einfluß von Zuständen außerhalb dieses Modellraums durch eine Renormierung der Wechselwirkungen berücksichtigen. Dies wird im Anhang 7 nach einer Methode von Winter (Wi72) durchgeführt. Aus der Herleitung folgt, daß die singuläre Wechselwirkung $V^{(2)}$ durch eine Wechselwirkung $T^{\text{Br.}}$ vom Brücknerschen Typ ersetzt wird. Das ebenfalls singuläre v^{HF} wird durch den Ausdruck $-2iT^{\text{Br.}}g$ (A.7.2) ersetzt, eine energieabhängige, aber endliche Größe.

4. Untersuchung des kausalen Charakters von V_{opt} durch Nachprüfen der Dispersionsbeziehung aus 2.4

4.1 Beschreibung des Modells

In diesem Kapitel soll anhand eines einfachen Modells die Dispersionsbeziehung (2.4.7) geprüft werden:

$$\operatorname{Re} V_{opt}(E) = v^{HF} + \sum_i \frac{U_i}{E - E_i} + \frac{i}{\pi} P \int_{E_i}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} V_{opt}(E')}{E' - E} dE'. \quad (4.1.1)$$

Ausgangsgleichung für die Rechnung ist (2.3.18'):

$$\frac{i}{\hbar} \sum_{\vec{k}, \vec{k}_i} \langle \vec{k}^{(u)} | \operatorname{Im} V_{opt}(\vec{k}_i) | \vec{k}^{(u)} \rangle = - \frac{\hbar^2 \vec{k}}{2m} \sum_{\vec{k}, \vec{k}_i} \vec{\sigma}_R(\vec{k}) = - \frac{\hbar^2 \vec{k}}{2m} \vec{\sigma}_R(\vec{k}_i). \quad (4.1.2)$$

Für den gemittelten Wirkungsquerschnitt $\vec{\sigma}_R(\vec{k})$ wird über den gesamten Energiebereich die Stoßnäherung für den Einfachstreuungsterm der Vielfachstreuungstheorie (RT67, S.351ff) verwendet, die in Wirklichkeit nur für hohe Energien realistisch ist. Da aber in das Dispersionsintegral in (1) die hohen Energien entscheidend eingehen, ist die Annahme vernünftig. Die Theorie dieser Näherung ist im Anhang 8 dargestellt. Für den Reaktionswirkungsquerschnitt (2) erhält man (s.(A.8.20))

$$- \frac{\hbar^2 \vec{k}_i}{2m} \vec{\sigma}_R(\vec{k}_i) = - \frac{\hbar^2}{4\pi m^2} \sum_{\vec{\eta}_i, \vec{\eta}_f} \int d^3 \vec{k}' \vec{k}_{\vec{\eta}_i, \vec{\eta}_f, \vec{k}_i} \vec{k}_{\vec{\eta}_i, \vec{\eta}_f, \vec{k}_i}^* \cdot V R_i(\vec{k} + \vec{k}', \omega; \vec{\eta}_i \vec{\eta}_f \eta_i') \quad (4.1.3)$$

$$\text{mit } \vec{k}_i := \frac{1}{2} \vec{k}_i, \quad \vec{k}' := \vec{k}_f - \vec{k}_i, \quad \omega := e_{k_f} - e_{k_i} < 0.$$

VR_i ist durch (A.8.13) gegeben. In dieser „Autokorrelationsfunktion“ ist die ganze Information über das Target enthalten, dessen Grundzustand durch den Buchstaben „i“ charakterisiert ist:

$$VR_i(q, \omega, \eta, \eta', \eta, \eta') = \int dt e^{i\omega t} \left\{ \langle i | S_{\eta, \eta'}^+(q, t) S_{\eta, \eta'}(q, 0) | i \rangle - \langle i | S^+(\dots) | i \rangle \langle i | S^-(\dots) | i \rangle \right\} \quad (4.1.4)$$

$$\text{mit } S_{\eta, \eta'}(q) = \int \frac{d^3 q'}{(2\pi)^3} a_{q', \eta}^+ a_{q-q', \eta} = \int d^3 \tau e^{-iq \cdot \tau} S_{\eta, \eta'}(\tau) = \int d^3 \tau e^{-iq \cdot \tau} a_{\tau, \eta}^+ a_{-\tau, \eta} \quad (4.1.4')$$

$S_{\eta, \eta'}(\tau) = a_{\tau, \eta}^+ a_{-\tau, \eta}$ ist der übliche Dichteoperator. Ein Ausdruck wie (4) ist nur dann tatsächlich berechenbar, wenn über den Grundzustand des Targets relativ drastische vereinfachende Annahmen gemacht werden. In dieser Arbeit wird das Target durch Kernmaterie variabler Dichte in Hartree-Fock-Näherung approximiert („lokale-Dichte-Approximation“, „LDA“). Dies ist eine sehr einschneidende Voraussetzung. Auch werden, wie im nächsten Abschnitt beschrieben, für die Streuwellen $1/2^{(+)}$ von V_{opt} in Gleichung (2) näherungsweise ebene Wellen (Born'sche Näherung) angenommen. Das Modell stellt eine Alternative dar zu dem bei ähnlichen Rechnungen meist verwandten (Pa67, Pa68, ARK69, LS69), welches im V_{opt} für hohe Energien über die Beziehung

$$V_{\text{opt}}^A(e_k, \tau) = -\frac{4\pi \hbar^2}{2m} A \cdot \rho(r) f_{e_k}^{(0)}(\cdot \gamma_{\text{Pauli}}) \quad (4.1.5)$$

$$\Rightarrow \text{Im } V_{\text{opt}}^A(e_k, \tau) = -\frac{\hbar^2}{2m} A \rho(r) \sigma_{\text{tot}}^{\text{NN}}(k) (\cdot \gamma_{\text{Pauli}})$$

berechnet (der Faktor γ_{Pauli} soll die Erfüllung des Pauliprinzipis gewährleisten (Go48, CV55, BM69, S.260f, Ho63, S.5)). $\sigma_{\text{tot}}^{\text{NN}}(k)$ ist der totale Nukleon-Nukleon-Wirkungsquerschnitt. In eine Gleichung wie (5) kann man leicht formal eine ungleiche Zahl von Protonen und Neutronen einbauen (mit $n \rightarrow$ „neutron“, $p \rightarrow$ „proton“ folgt z.B.

$$\text{Im } V_{\text{opt}}^A(e_k, \tau) = -\frac{\hbar^2}{2m} \left\{ N \rho_N(\tau) \frac{1}{2} (\sigma_{nn} + \sigma_{pn}) + Z \rho_p(\tau) \frac{1}{2} (\sigma_{pp} + \sigma_{pn}) \right\}, \quad (4.1.6)$$

wobei die γ_n , γ_p die Faktoren sind, welche für die Gültig-

keit des Pauliprinzips sorgen), während dies auf dem in dieser Arbeit eingeschlagenen Weg schwierig wäre. Das Volumenintegral über $\text{Im } V_{\text{opt}}$ aus Gleichung (5) ergibt:

$$\int d^3r \langle \tau | \text{Im } V_{\text{opt}}(e_k) | \tau \rangle = \langle k | \text{Im } V_{\text{opt}}(e_k) | k \rangle = -\frac{\hbar^2 k}{2m} A G_{\text{tot}}^{NN}(k) (-\gamma_{\text{Pauli}}). \quad (4.1.7)$$

(Es geht die Annahme ein, daß V_{opt} lokal ist). Man erkennt sofort die Ähnlichkeit zu Gleichung (2). Der Vorteil der in dieser Arbeit verwendeten Methode besteht darin, daß durch den „Formfaktor“ $R_1(q, \omega)$ (vgl. (3)) in natürlicher Weise für die Einhaltung des Pauliprinzips gesorgt ist. Auch bekommt man über die Gleichungen (2) und (3) in lokaler-Dichte-Näherung (siehe Abschnitt (4.3)) eine Radialabhängigkeit für den Imaginärteil von V_{opt} , welche nicht proportional der Dichte ist, sondern, in betonterem Maße bei niedrigeren Energien (25-100 MeV), sich über diese hinaus erstreckt. Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, wie man aus Gleichung (2) in Born'scher Näherung für $|k^{(1)}\rangle$ ein ortsabhängiges Potential $\text{Im } V_{\text{opt}}$ ableiten kann.

4.2 Berechnung eines ortsabhängigen Potentials aus Gleichung (2.3.18') in Born'scher Näherung für die Streuwellen

Setzt man in (2.3.18') für die optischen Modellzustände $|k^{(1)}\rangle$ die Born'sche Näherung $|k\rangle$ und berücksichtigt (4.1.3), so folgt (Im $V := W$)

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{k_i} \langle k_i, \eta_{k_i} | \text{Im } V_{\text{opt}}(e_{k_i}) | k_i, \eta_{k_i} \rangle &= \frac{1}{4} \sum_{k_i} \int d^3r d^3r' e^{i k_i \cdot (r-r')} \langle r, \eta_{k_i} | \text{Im } V_{\text{opt}}(e_{k_i}) | r', \eta_{k_i} \rangle \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k_i} \int d^3R \left\{ \int d^3s e^{i k_i \cdot s} \langle R - s/2, \eta_{k_i} | \text{Im } V_{\text{opt}}(e_{k_i}) | R + s/2, \eta_{k_i} \rangle \right\} = \\ &= -\frac{\hbar^2}{4\pi m^2} \int d^3R \left\{ \sum_{\substack{k', \eta' \\ \eta, \eta'}} \int d^3k' f_{k_i, \eta}^{\dagger} f_{k', \eta'}^{\dagger} f_{k_i, \eta} f_{k', \eta'} \int d^3s dt e^{i(\omega - i(k' - k) \cdot s) \cdot s} \right. \\ &\quad \left. \cdot \langle i | S_{\eta \eta'}^{\dagger}(R - \frac{s}{2}, 0) S_{\eta \eta'}^{\dagger}(R + \frac{s}{2}, t) | i \rangle \right\} := \langle k_i | \bar{W}(e_{k_i}) | k_i \rangle, \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

wobei die Definitionen (A.8.13,13') verwandt wurden. Da das optische Potential eine ausgeprägte Nichtlokalität neben seiner Energieabhängigkeit hat (vgl. Pa67-68, Lip66, Ri63, MW69), wird, nach dem Vorbild von Perey und Buck (PB62), für V_{opt} folgender separable Ansatz gemacht:

$$\frac{1}{4} \sum_{k_i, k_f} \langle \tau' e_{k_i} | V_{\text{opt}}(R, e_{k_i}) | \tau e_{k_f} \rangle := \langle \tau' | \bar{W}(e_{k_i}) | \tau \rangle := w_{e_{k_i}}(R) \cdot f_{\beta(e_{k_i})}(\rho) \quad (4.2.2)$$

mit $\bar{W} = \frac{1}{2} (W + W')$, $\rho = r - r'$.

$\beta(e_k)$ ist die Reichweite der Nichtlokalität von $\bar{W}(e_k)$. Die Nichtlokalitätsfunktion f_{β} sei auf 1 normiert, d.h. Integration über den Nichtlokalitätsradius β ergibt

$$\int d\beta f_{\beta(e_k)}(\rho) = 1. \quad (4.2.3)$$

Im Folgenden wird für $f_{\beta}(\rho)$ speziell eine Gaussfunktion der Breite β gewählt, wie bei Perey und Buck:

$$f_{\beta(e_k)}(\rho) = \frac{1}{\pi^{3/2} [\beta(e_k)]^3} e^{-\rho^2 / \beta^2(e_k)}; \quad (4.2.4)$$

Mit diesem Ansatz wird aus (1), falls es erlaubt ist, die R-Integranden auf der rechten wie der linken Seite zu identifizieren, was stillschweigend vorausgesetzt wird:

$$\begin{aligned} \text{Im } V_{\text{opt},L}(R, e_{k_i}) &:= \bar{W}(R, e_{k_i}, e_{k_i}) := w_{e_{k_i}}(R) \cdot \int d\beta^3 e^{i k_i \cdot \rho} f_{\beta(e_{k_i})}(\rho) = \\ &= -\frac{\hbar^2}{4\pi m^2} \int d^3 k' \sum_{\substack{\eta, \eta', \eta'' \\ \eta = \eta'}} f_{k_i \eta, \eta'}^* f_{k_i \eta, \eta''} f_{k_i \eta', \eta''} \cdot \int d\beta^3 d\tau \left\{ \right. \\ &\left. \left\{ \omega_{\eta'} [it(k'^2 - 3k'^2 + 2k_i k') \omega_{\eta'}(k, k')] \cdot (k, k') f] + i \left(\frac{d}{dt} \right)_{\eta'}^2 (k, k') \cdot \left(\frac{d}{dt} \right)_{\eta'}^2 (k, k') \right\} \right\} \\ &(k = \frac{1}{2} k_i) \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Die Fouriertransformierte auf der linken Seite ergibt im Spezialfall (4)

$$\int d^3p \, e^{i \vec{k}_i \cdot \vec{r}} f_{\beta(e_{k_i})}(p) = e^{-\frac{\vec{k}_i \cdot \vec{\beta}(e_{k_i})}{4}} \quad (4.2.6)$$

Im Falle eines lokalen Potentials gilt $f(p) = \delta(p)$, $\vec{R} = \vec{r} = \vec{r}'$; aus (5) und (6) folgt also, daß im Falle einer Nichtlokalität der Reichweite $\beta(e_{k_i})$ das nichtlokale Potential $W(r, r', e_k)$ einem impulsabhängigen lokalen Potential

$$W_{optL}(R, e_{k_i}) := \bar{W}(R, \vec{k}_i, e_{k_i}) = w_{e_{k_i}}(R) e^{-\frac{\vec{k}_i \cdot \vec{\beta}(e_{k_i})}{4}} \quad (4.2.7)$$

„äquivalent“ ist. Der Index „L“ deutet darauf hin, daß dies ein „äquivalentes lokales Potential“ ist. Das Ergebnis (5) wäre mit (4.1.5) zu vergleichen.

Zur Berechnung von (5) muß die aus der Autokorrelationsfunktion (4.1.4), (A.8.14) hervorgehende ortsabhängige Funktion $R_1(\vec{R}, q, \omega)$,

$$\bar{R}_1(\vec{R}, q, \omega; \vec{\eta} \vec{\eta}' \vec{\eta} \vec{\eta}') := \int d^3p \, dt \left\{ \exp(iA[(\vec{k}_2 + \vec{k}_1')^2 - 4k^2] - i(\vec{k}_1' \cdot \vec{k}_2) \cdot p) \langle i \delta_{\vec{\eta} \vec{\eta}'}(\vec{k}_1 - \frac{p}{2}, 0) \delta_{\vec{\eta} \vec{\eta}'}(\vec{k}_2 + \frac{p}{2}, t) \rangle \right\}, \quad (4.2.8)$$

ausgewertet werden. Sie soll der Einfachheit halber auch „Autokorrelationsfunktion“ genannt werden. Will man bei der Berechnung von R_1 keinen zu großen Aufwand treiben, so ist man auf ein einfaches Modell für das Target angewiesen. In dieser Arbeit wird daher, ähnlich wie bei den meisten bisherigen Berechnungen von W (s. z.B. Ho63, Ho71) das Target als aus Kernmaterie örtlich variabler Dichte angenommen. Dies ist die „lokale-Dichte-Näherung“. Sie wird im nächsten Abschnitt behandelt.

4.3 Lokale-Dichte-Näherung für $\bar{W}(e_k)$; lokale äquivalente Potentiale; Gleichungen des Modells

Im Anhang 9 wird der Zusammenhang der Autokorrelationsfunktion (A.8.14), $\bar{R}_i(R, q, \omega; \eta_i' \eta \eta')$, mit einer speziellen linearen Antwortfunktion untersucht, wenn der Grundzustand des Targets durch den Grundzustand eines großen Volumens V mit Kernmaterie gegeben ist. V soll so groß sein, daß Oberflächeneffekte vernachlässigt werden können; dann kann man die Translationsinvarianz ausnützen, so daß R_i nicht mehr von R abhängt. Die lokale-Dichte-Näherung (LDA) besteht nun darin, daß man sich das Target aus Kernmaterie örtlich variabler Dichte zusammengesetzt denkt. Die Dichte $n(r)$ hängt mit dem Fermiimpuls p_F bei gleicher Protonen- und Neutronenanzahl über die Beziehung

$$n(r) = \frac{2 p_F(r)^3}{3 \pi^2 \hbar^3} \quad (4.3.1)$$

zusammen. Die LDA sollte gut sein, wenn die Änderung von $n(r)$ mit dem Radius nur schwach ist, müßte also am Kernrand sehr schlecht sein (hier fällt die Dichte in einem Bereich von etwa zwei Fermi von $\sim 85\%$ auf $\sim 15\%$ ihres Maximalwertes, allerdings nur in radialer Richtung. Zwei Fermi entsprechen etwa der Korrelationslänge zweier Nukleonen). Nichtsdestoweniger gibt es Abschätzungen (Cu71) mit dem Ergebnis, daß die LDA bis zu dem Radius vertretbar ist, an dem die Dichte auf 15% ihres Mittelpunktswertes abgesunken ist.

Im Anhang 9 wird die Autokorrelationsfunktion (4.2.8) für ein aus Kernmaterie konstanter Dichte, d.h. konstanten Fermiimpulses, bestehendes Target unter Vernachlässigung der Teilchen-Loch-Wechselwirkung K^{ph} hergeleitet; insbesondere gilt dies für die Hartree-Fock-Näherung. In der LDA wird in dem Matrixelement $\langle 1 | \delta \mathcal{F}(R - \frac{q}{2}, 0) \delta \mathcal{F}(R + \frac{q}{2}, 0) | 1 \rangle$ von (4.2.8) $|1\rangle := |0\rangle := |p_F(R)\rangle$ (Grundzustand von Kernmaterie mit Fermiimpuls $p_F(r)$) gesetzt. D.h. mit (A.9.1) gilt

$$\bar{R}_0^{LDA}(R, q, \omega; \eta_i' \eta \eta') = R_{p_F(R)}^{KM}(q, \omega; \eta_i' \eta \eta') \quad (4.3.2)$$

Für $R_{p_F(R)}^{KM}$ ist in Hartree-Fock-Näherung Formel (A.9.12) bzw. (A.9.12') zu setzen:

$$R_{p_F(R)}^{KM(HF)}(q, \omega; \bar{\eta}' \bar{\eta} \eta \eta') = \delta_{\bar{\eta}' \eta'} \delta_{\bar{\eta} \eta} \cdot \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3 p \left\{ \right. \\ \left. \delta(\omega - E_{p_F(R)}^{HF}(p+q) + E_{p_F(R)}^{HF}(p)) \cdot \Theta(E_{p_F(R)}^{HF}(p) - E_{p_F(R)}^{HF}(p_F(R))) \Theta(E_{p_F(R)}^{HF}(p_F(R)) - E_{p_F(R)}^{HF}(q+p)) \Theta(-\omega) \right\}. \quad (4.3.3)$$

Diese Funktion läßt sich analytisch auf relativ einfache Weise berechnen, wenn man die Einteilchen-Hartree-Fock-Energie $E_{p_F}^{HF}(p)$ durch einfache Funktionen approximiert. In der vorliegenden Arbeit wird dies, wie im Anhang 10 geschildert, durch drei aneinandergestückelte Parabeln erreicht: Für Impulse kleiner als p_F wird eine effektive-Masse-Näherung für $V_{p_F}^{HF}(p)$ durchgeführt, genauer, $V_{p_F}^{HF}(p)$ wird durch seine Ausgleichsparabel ersetzt ($\Rightarrow E_{p_F}^{HF}(p) = V_0 + p^2/2m^*$); für große p -Werte geht $V_{p_F}^{HF}(p)$ gegen den Hartree-Term nahe Null, so daß $E_{p_F}^{HF}(p) = v + p^2/2m$ wird. Im Zwischenbereich wird ebenfalls parabolisch interpoliert. Man erhält unter diesen Voraussetzungen für die Autokorrelationsfunktion (3) die Formel (A.10.5), die wegen ihrer Länge hier nicht aufgeführt werden soll. Mit dieser Funktion hat man in Gleichung (4.2.5) einzugehen. Berücksichtigt man dabei Gleichung (4.2.7), so folgt

$$\mathcal{M}_{opt,L}(R, e_{k_i}) = w_{e_{k_i}}(R) \exp \left\{ - \frac{m}{L} e_{k_i}^3 c_{k_i} \right\} = \\ = - \frac{\hbar^2}{4\pi m^2} \int d^3 k' \sum_{\eta \dots} f_{k_2 k_1' \eta \dots}^* f_{k_2 k_1' \eta \dots} \bar{R}_{p_F(R)}^{KM(HF)}(k_2, k_1', \eta \dots). \quad (4.3.4)$$

Nach (4.2.2,4) ist

$$\langle \pi' | \bar{W}(e_{k_i}) | \pi \rangle = w_{e_{k_i}}(R) \cdot \frac{1}{\pi^{3/2} [\beta(e_{k_i})]^3} e^{-\frac{\beta^2}{[\beta(e_{k_i})]^2}}. \quad (4.3.5)$$

Falls $\langle \pi' | \bar{W}(e_{k_i}) | \pi \rangle$ ein lokales Potential ist, ist in (4.2.2) $f_{\beta}(\beta) = \delta(\beta)$ zu setzen. In (4) bedeutet dies $\beta=0$, und Gleichung (5) wird zu

$$\langle \tau' | W_{\text{local}}(\underline{e}_{\underline{k}_i}) | \tau \rangle = W_{\underline{e}_{\underline{k}_i}}(\tau) \delta(\tau' - \tau). \quad (4.3.5')$$

In (4) wird in der vorliegenden Arbeit die Streuamplitude des Tabakin-Potentiales (Ta64) eingesetzt. $\bar{R}_{PE}^{KM(HF)}(\underline{k}_1, \underline{k}', \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)$ ist proportional zu $\delta_{\eta_1, \eta_4} \delta_{\eta_2, \eta_3}$, so daß das Integral in (4) die Gestalt

$$\int d^3 k' \sum_{\eta_1, \dots} |f_{\underline{k}, \underline{k}', \eta}|^2 \bar{\tau}(\underline{k}, \underline{k}') \quad (4.3.6)$$

annimmt. Die Summe über die Streuamplitudenquadrate wird im Anhang 11 angegeben.

Um den Realteil von V_{opt} zu bestimmen, hat man nun den Ausdruck (5) für den Imaginärteil des optischen Potentials in die Dispersionsbeziehung (4.1.1) einzusetzen. In der lokalen-Dichte-Näherung entfällt der Term mit den diskreten Polen, da die Schwellenenergie für inelastische Prozesse, ε_1 , gleich Null ist. Es folgt also:

$$\langle \tau' | \text{Re } V_{\text{opt}}(E) | \tau \rangle = \langle \tau' | v^{HF} | \tau \rangle + \frac{i}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\langle \tau' | \bar{W}(E') | \tau \rangle}{E' - E} dE'. \quad (4.3.7)$$

Da v^{HF} in Kernmaterie nur von $|\tau - \tau'| = \rho$ abhängt und W aufgrund des Ansatzes (4.2.2) nur von $R = \frac{1}{2} |\tau + \tau'|$ und ρ abhängt, gilt dasselbe auch für $\text{Re } V_{\text{opt}}$. Um einen Vergleich mit aus Experimenten gewonnenen phänomenologischen optischen Potentialen zu ermöglichen, welche durchweg lokal sind (s. Ho63), muß man aus den nichtlokalen Größen $\text{Re } V_{\text{opt}}$, v^{HF} und $W = \text{Im } V_{\text{opt}}$ "Äquivalente lokale Potentiale" ermitteln. Es gibt mittlerweile eine relativ reiche Literatur zu diesem Thema (s. z.B. Pb62, Fr65, Fi66-68, Co70, Ma74). In der vorliegenden Arbeit wurde für den Imaginärteil von V_{opt} durch die Gleichungen (4.2.5-7) schon ein "lokales Äquivalent" definiert, für den Realteil wird die Theorie von W.E. Frahn benutzt (Fr65). Dort wird für das als Ausgangspunkt dienende nichtlokale Potential dieselbe Abhängigkeit von R und ρ wie

in dieser Arbeit angenommen:

$$\langle x' | V | x \rangle = V_N(R) \cdot f_{\beta}(\xi) . \quad (4.3.8)$$

Unter der Voraussetzung $V_N(R) = V_N(\frac{1}{2}(x+x')) \cong V_N(x)$, welche bei geringer Dichtevariation gut erfüllt sein sollte, läßt sich dann der Term

$$I(x) = \int d^3x' \langle x | V | x' \rangle \psi(x') \quad (4.3.9)$$

der Schrödingergleichung approximativ durch

$$I(x) \approx V_L(x) \psi(x) \quad (4.3.10)$$

wiedergeben. V_L ist das „äquivalente lokale Potential“.

Falls V zusätzlich von der Energie abhängt, wie dies bei

V_{opt} der Fall ist, erhält man $V_L(r, E)$ folgendermaßen:

Zunächst werde die Fouriertransformierte von $V(R, \xi, E)$ definiert durch

$$\tilde{V}(R, k, E) := \int d^3\xi e^{i k \cdot \xi} V(R, \xi, E) . \quad (4.3.11)$$

Dann löse man die Gleichung

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \tilde{V}(R, k, E) \quad (4.3.12)$$

nach k auf. Das Ergebnis sei $k_R(E)$. Dieses $k_R(E)$ setze man in $\tilde{V}(R, k, E)$ ein, um

$$V_L(R, E) := \tilde{V}(R, k_R(E), E) \quad (4.3.13)$$

zu erhalten. In dieser Arbeit wird bei der Lösung von (12) der Imaginärteil von V_{opt} weggelassen: Man bekäme sonst eine komplexe Gleichung. Da aber $\tilde{V}(k)$ nicht analytisch gegeben ist, ist es für komplexe k -Werte nicht bekannt, und das Verfahren würde zusammenbrechen. Durch Gleichung (4.2.5-7) ist

für Im V_{opt} schon ein "lokales äquivalentes Potential" definiert, so daß es diesbezüglich keine Schwierigkeiten gibt. Statt (12) ist also für jeden Parameter R die Gleichung

$$E = e_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m} + \tilde{v}^{\text{HF}}(R, k_0) + \tilde{V}_d(R, k_0, e_k) \quad (4.3.14)$$

mit
$$\tilde{v}^{\text{HF}}(R, k_0) := \tilde{v}_{P_F(R)}^{\text{HF}}(k_0), \quad (4.3.15)$$

$$\tilde{V}_d(R, k_0, e_k) = \int d^3 \xi \, e^{i k_0 \cdot \xi} \left\{ \frac{1}{\pi} P \int_0^\infty \frac{\bar{W}(R, \xi, E')}{E' - e_k} dE' \right\} \quad (4.3.16)$$

$\uparrow$
"dispersiv"

nach k_0 aufzulösen. Das Ergebnis sei $k_{0R}(E)$. So bekommt man für den Realteil des optischen Potentials die Gleichung

$$\text{Re } V_{\text{opt}_L}(R, e_k) = \tilde{v}^{\text{HF}}(R, k_{0R}(e_k)) + \tilde{V}_d(R, k_{0R}(e_k), e_k). \quad (4.3.17)$$

Für den Imaginärteil gilt Formel (4):

$$\text{Im } V_{\text{opt}_L}(R, e_k) = w_{e_k}(\nu) \cdot \tilde{f}_{\beta(e_k)}(k) \quad (4.3.18)$$

Die Verallgemeinerung von Gleichung (5) auf beliebige Nicht-lokalitätsfunktionen $\tilde{f}_{\beta(e_k)}(\xi)$ lautet (vgl. (4.2.7))

$$\bar{W}(R, \xi, e_k) = \text{Im } V_{\text{opt}_L}(R, e_k) \left[\tilde{f}_{\beta(e_k)}(k) \right]^{-1} \tilde{f}_{\beta(e_k)}(\xi). \quad (4.3.19)$$

Einsetzen in (16) und anschließende Fouriertransformation ergibt

$$\tilde{V}_d(R, k_0, e_k) = \frac{1}{\pi} P \int_0^\infty \frac{\text{Im } V_{\text{opt}_L}(R, e_{k'})}{e_{k'} - e_k} \frac{\tilde{f}_{\beta(e_k)}(k_0)}{\tilde{f}_{\beta(e_{k'})}(k_0')} de_{k'} \quad (4.3.20)$$

Dieser Ausdruck ist also in der Bestimmungsgleichung für $k_0(E)$, Gleichung (14), zu verwenden. Falls $f_{\beta(e_k)}$ die Gauss-funktion (4.2.4) ist, wird (20) speziell zu

$$\tilde{V}_d(R, k_0, e_k)_{\text{Gauss}} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d e_k' \frac{\operatorname{Im} V_{\text{opt}_L}(R, e_k')}{e_k' - e_k} \exp\left\{ \frac{m}{2} \beta^2(e_k) (e_k' - e_k) \right\}. \quad (4.3.20')$$

Durch (4), (20), (20'), (14)-(17) sind die Gleichungen des Modells gegeben. Die R-Abhängigkeit aller Größen ist implizit über den Fermiimpuls am Ort R, $p_F(R)$, gegeben. Diesen bekommt man aus Gleichung (1), wenn die Dichte $n(R)$ vorgegeben wird. Außer der Dichte wird nur die Nichtlokalitätsfunktion $f_{\beta(E)}(q)$ von aussen in das Modell hineingetragen. Nach Vorgabe von R wird für alle Einschussenergien e_k mittels (4) das äquivalente lokale imaginäre Potential $\operatorname{Im} V_{\text{opt}_L}(R, e_k)$ berechnet. Das Ergebnis wird in Gleichung (20) eingesetzt und $V_d(R, k_0, e_k)$ für verschiedene k_0 -Werte ermittelt. Dann ist Gleichung (14) nach $k_0(E)$ aufzulösen und das Ergebnis in (17) einzusetzen, um $\operatorname{Re} V_{\text{opt}_L}(R, e_k)$ zu erhalten.

4.4 Beschreibung der numerischen Rechnungen

Die numerischen Rechnungen wurden nach dem am Ende des letzten Abschnitts angegebenen Schema durchgeführt. Die Dichteverteilung $n(r)$ wurde der Arbeit von Verlet und Gavoret (VG58) entnommen (A=197):

$$n(R) = \frac{0.169}{1 + \exp\{(R-6.38)/0.535\}}. \quad (4.4.1)$$

Es sei an dieser Stelle bemerkt, daß es sich aufgrund der Modellannahme $N=Z$ nicht um ein reales Goldtarget handelt; d.h. die Korrektur zum optischen Potential, die durch die Coulombwechselwirkung und die Proton-Neutron-Asymmetrie hervorgerufen wird, wird vom Modell nicht erfaßt. Über Gleichung (4.3.1) ergibt sich für $R=0$ im Kernzentrum ein Fer-

miimpuls von

$$P_F(0) = 1.3576 F^{-1} \quad (4.4.2)$$

Die Nichtlokalität des Imaginärteils von V_{opt} wurde gemäß (4.2.2,4) proportional einer Gaussfunktion angesetzt, deren Breite $\beta(e_k) := \bar{\beta}(k)$ als lineare Funktion von k gewählt wurde, mit $\beta(0) = 1 F$ und $\beta(500 \text{ MeV}) = 0$. Oberhalb 500 MeV wird, in Übereinstimmung mit anderen Autoren (siehe z.B. die Diskussion bei Passatore (Pa67-68) und (ARK69)) angenommen, daß $\text{Im } V_{\text{opt}}(e_k)$ lokal ist. D.h. mit $E_0 = 500 \text{ MeV}$, $k k_0 = \sqrt{2mE_0}$ wurde gesetzt:

$$\bar{\beta}(k) = \begin{cases} 1 - k/k_0 & \text{für } k \in [0, k_0] \\ 0 & k > k_0 \end{cases} \quad (4.4.3)$$

Es stellte sich heraus, daß unter der obigen Voraussetzung für $\bar{\beta}(0)$ und $\bar{\beta}(k_0)$ die funktionale Abhängigkeit von $\bar{\beta}(k)$ einen sehr geringen Einfluß auf die Ergebnisse hatte, so daß die einfache Funktion (3) gerechtfertigt wird. Alternativ wurde mit einem rein lokalen Ansatz für $\text{Im } V_{\text{opt}}$ gerechnet.

Die numerischen Rechnungen wurden für 22 Radien R_i und 13 Einschußenergien e_k durchgeführt; die Radien wurden so ausgewählt, daß

$$n(R_i) = \frac{i-2}{20} n_0 \quad \text{für } i = 3, \dots, 22$$

$$R_2 = 9 F \quad (4.4.4)$$

$$n(R_1) = n_0 / 1000$$

gilt. n_0 ist die Dichte im Kerninneren: $n_0 = .169 F^{-3}$. Als Einschußenergien wurden gewählt: 25, 50, 75, 100, 125, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500 MeV. Da die Berechnung von $\text{Im } V_{\text{opt},L}(R_i, e)$ nach Gleichung (4.3.4) und Anhang 11 zwei Integrationen, eine über dk' und eine über $d\cos\vartheta(k, k')$ erfordert, und andererseits $\text{Im } V_{\text{opt},L}(R_i, e)$ im Integranden

der Dispersionsbeziehung (4.3.20') steht, wurde diese Funktion, um Rechenzeit zu sparen, nur für eine relativ geringe Anzahl von Stützstellen tabelliert. Dazwischen wurde kubisch interpoliert. Das Dispersionsintegral (4.3.20') wurde durch Substitution in ein Integral über den Impuls transformiert. Das Hauptwertintegral wurde nach folgender Methode berechnet:

$$P \int_a^b \frac{f(x)}{x-x_0} dx = \int_a^b \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} dx + f(x_0) P \int_a^b \frac{1}{x-x_0} dx \quad (4.4.5)$$

$$P \int_a^b \frac{1}{x-x_0} dx = \ln \frac{b-x_0}{x_0-a} \quad \text{für } x_0 \in (a, b).$$

Um Ungenauigkeiten zu vermeiden, wurde das Integrationsintervall in verschiedene Teilbereiche derart eingeteilt, daß das Intervall (a, b) aus (5) nicht zu groß ausfiel. Zur Integration selbst wurden Gauss-Programme gewählt, um die Zahl der Stützstellen möglichst gering zu halten. Zur Berechnung der in der Streuamplitude $\langle k' | T | k \rangle$ des Tabakin-Potentials vorkommenden Funktionen $t_{L'L}^{DST}(k', k)$ (vgl. Anhang 11) und des Hartree-Fock-Potentials für Kernmaterie $\tilde{V}^{HF}(k)$ (siehe die Originalarbeit von F. Tabakin, Ta64) standen numerische Programme von Herrn D. Mack zur Verfügung (WM68).

4.5 Diskussion der Ergebnisse; Abbildungen

In Abb. 1 ist $\Im_m V_{opt_L}$ als Funktion des Impulses $p = \sqrt{2mE}$ für den Fermiimpuls $p_F = 1.3576 \text{ F}^{-1}$ im Kerninneren dargestellt. Das Maximum liegt bei $p = 4.87 \text{ F}^{-1}$, was einer Energie von 492 MeV entspricht. Danach fällt $\Im_m V_{opt}$ sehr langsam gegen Null ab (vgl. die eingehendere Diskussion von $\Im_m V_{opt}$ für Energien $< 500 \text{ MeV}$ weiter unten). Aus Experimenten gewonnene Daten (Abb. 2 (Pa67-68, BM69)) zeigen für hohe Energien ein Ansteigen von $|\Im_m V_{opt_L}(E)|$ bis zu einem Wert von etwa 50 MeV, welcher bei einer Einschußenergie von ungefähr einem GeV erreicht wird, und für höhere Energien ein etwa konstantes Verhalten. Dieser Unterschied bei hohen Energien ist auf relativistische Effekte zurückzuführen (Mesonenpro-

duktion usw.). Aus einer nichtrelativistischen Theorie kann man dieses Verhalten nur mit Hilfe eines Hard-Core-Potentials bekommen. Z.B. wird aus Berechnungen des Massenoperators in Kernmaterie mit dem Hamada-Johnston-Potential (HJ62) ersichtlich, daß der Hard-Core genau die verlangte Energieabhängigkeit erzeugt (H. Gall, wird veröffentlicht). Andererseits ist die Dispersionsbeziehung (4.3.7) für ein Hard-Core-Potential nicht verwendbar, weil in diesem Fall das Hartree-Fock-Potential nicht definiert ist. Man kann daher von den in der vorliegenden Arbeit durchgeführten Modell-Rechnungen keine genaue Übereinstimmung mit experimentellen Daten erwarten. So erkennt man an Abb. 3, in der $\text{Re } V_{\text{opt}}(E)$ im Kerninneren zusammen mit $\text{Im } V_{\text{opt}}(E)$ dargestellt ist, daß die reellen Potentialtiefen im Vergleich zum Experiment (Abb. 4) durchweg dem Betrage nach zu groß sind. Die aus der nichtlokalen Rechnung folgenden Ergebnisse (durchgezogene Kurve mit $\beta(k)$ aus Gleichung (4.4.3) liegen geringfügig (im Durchschnitt um 2.5 MeV) höher als diejenigen, welche aus der Annahme eines lokalen $\text{Im } V_{\text{opt}}$ folgen (gestrichelte Kurve $\text{Im } V_{\text{opt}}$). Die Abweichung von den experimentellen Daten (Abb. 4) ist systematisch. Der dispersive Anteil V_d von $\text{Re } V_{\text{opt}}$ ist ebenfalls in Abb. 3 wiedergegeben (Kurven $\bar{V}_I$ und $\bar{V}_{II}$). V_d hat bei niedrigen Energien einen „Buckel“, ein Ergebnis, welches auch Lipperheide und Schmitt (LS69) erhalten. Diese Autoren setzen aus optischen Modell-Fits ermittelte Werte von $\text{Im } V_{\text{opt}}(E)$ in die Dispersionsbeziehung (4.3.7) ein. Auch sie erhalten systematisch zu tiefe reelle Potentialtiefen. Um ihre Ergebnisse mit den experimentellen Daten in Übereinstimmung zu bringen, schneiden sie $\text{Im } V_{\text{opt}}(E)$ bei hohen Energien ab. In der vorliegenden Arbeit wird ein u.E. „physikalischerer“ Weg eingeschlagen, um das Verhalten von $\text{Re } V_{\text{opt}}$ zu korrigieren. Dies sei im Folgenden ein wenig eingehender erläutert. Sei

$$\text{Re } V_{\text{opt}}(E) := V^{\text{HF}} + V_d(E) \quad (\text{d: „dispersiv“}) , \quad (4.5.1)$$

$$\text{Im } V_{\text{opt}}(E) := W(E) . \quad (4.5.2)$$

Falls $W(E)$ für große E asymptotisch gegen eine Konstante $\neq 0$ geht, konvergiert das Dispersionsintegral

$$V_d(E) = \frac{1}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{W(E')}{E' - E} dE' \quad (4.5.3)$$

nicht. In diesem Falle gilt eine subtrahierte Form der Dispersionsbeziehung (4.3.7),

$$V_d(E) = V_d(E_0) + \frac{E - E_0}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{W(E')}{(E' - E)(E' - E_0)} dE'. \quad (4.5.4)$$

Falls das Dispersionsintegral (3) aber konvergiert, folgt Gleichung (4) leicht aus Gleichung (3). Nun liefert aber Gleichung (3), wegen des „unphysikalischen“ Verhaltens von $W(E')$ für große E' , zu große Werte $V_d(E)$. Um diese zu korrigieren, kann man für ein spezielles E_0 $V_d(E_0)$ in (4) durch das „wahre“ $V_d(E_0)$ (dieses werde $\bar{V}_d(E_0)$ genannt) ersetzen. Das Ergebnis ist dann ein „umgezeichnetes“ $V_d(E)$, welches $\hat{V}_d(E)$ genannt werde:

$$\hat{V}_d(E) = \bar{V}_d(E_0) + \frac{E - E_0}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{W(E')}{(E' - E)(E' - E_0)} dE' =$$

$$\stackrel{(4)}{=} V_d(E) + \bar{V}_d(E_0) - V_d(E_0) \quad (4.5.5)$$

Diese Gleichung ist „konsistent“, d.h. wegen $\hat{V}_d(E_0) = \bar{V}_d(E_0)$ folgt für alle E_1

$$\hat{V}_d(E) = \hat{V}_d(E_1) + \frac{E - E_1}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{W(E')}{(E' - E)(E' - E_1)} dE'$$

$$\stackrel{(5)}{=} V_d(E_1) + \bar{V}_d(E_0) - V_d(E_0) + V_d(E) - V_d(E_1) \text{ q.e.d.} \quad (4.5.6)$$

Es gibt nun kein „experimentelles“ Potential $V_d(r, r', E_0)$. Aus Experimenten erhält man lediglich eine lokale Potentialtiefe, indem man Rechnungen mit einem lokalen, energieunab-

hängigen Potential an das jeweils gegebene Experiment anpaßt. (siehe z.B. Ho63). Diese Potentialtiefe entspricht dem $\text{Re } V_{\text{opt}_L}(E)$ für $R=0$ im Kerninneren. (Nebenbei sei bemerkt, daß die experimentellen Potentialtiefen keineswegs eindeutig sind, vgl. My73.) Bei etwa 400 MeV Einschußenergie geht der experimentell ermittelte Realteil des optischen Potentials durch Null. Nach (4.3.17) setze man also ($E_0=400$ MeV)

$$\text{Re } V_{\text{opt}_L}(R=0, E_0) = \tilde{v}^{\text{HF}}(0, k_0(E_0)) + \tilde{V}_d(0, k_0(E_0), E_0) = 0 \quad (4.5.7)$$

v^{HF} hängt in dem angegebenen Energiebereich praktisch nicht mehr von der Energie ab. Schwierigkeiten macht die Impulsabhängigkeit der Fouriertransformierten $\tilde{v}_d(0, k_0(E), L_0)$ des "wahren" V_d . Deshalb werde die oben beschriebene Umweichung von V_d nur für dessen lokales Modell, in dem die Impulsabhängigkeit entfällt, durchgeführt. Aus (7) folgt dann

$$\tilde{V}_d(0, E_0) = - \tilde{v}_0^{\text{HF}} \quad (4.5.8)$$

$\tilde{v}_0^{\text{HF}}$ ist der im gegebenen Energiebereich konstante Wert des Hartree-Fock-Potentials. Durch Vergleich mit Formel (5) erhält man das umgezeichnete V_d , $\hat{V}_d$:

$$\hat{V}_d(0, E) = V_d(0, E) + \tilde{V}_d(0, E_0) - V_d(0, E_0) \quad (4.5.9)$$

Um nun den Realteil des optischen Potentials mit dem umgezeichneten dispersiven Anteil, $\hat{V}_d$, zu erhalten, setze man statt V_d in den Formeln (4.3.14-17) $\hat{V}_d$ ein. Man bekommt auf diese Weise ein korrigiertes $\text{Re } V_{\text{opt}_L}(R, E)$, welches zusammen mit dem ursprünglichen $\text{Im } V_{\text{opt}_L}(R, E)$ aus der lokalen Rechnung für V_d in den Abb. 3 und 4 dargestellt ist. Letztere enthält zum Vergleich experimentelle Daten, die von Passatore (Pa68) kompiliert wurden.

Die errechneten Werte für $\mathcal{J}_m V_{opt_L}(R, E)$ im Kerninneren ($R=0$) stimmen bis zu Einschußenergien von etwa 500 MeV überraschend gut mit Daten aus optischen Modellanalysen, sogar für Energien unter 100 MeV, überein (vgl. dazu Abb. 2, auch Hodgson, Ho71, S.173. ~~Weil in der vorliegenden Arbeit die Coulombwechselwirkung nicht berücksichtigt wurde, sollte man bei Energien unter 100 MeV die berechnete Kurve mit den experimentellen Daten für Neutronen (Volumenabsorption) vergleichen.~~ Da bei der Berechnung von $\mathcal{J}_m V_{opt_L}(R, E)$ als Ausgangsgleichung die Beziehung (4.1.2) in Born'scher Näherung für die Streuwellen verwandt wurde, also

$$\langle k^{(4)} | \mathcal{J}_m V_{opt}(e_k) | k^{(4)} \rangle \approx \langle k | \mathcal{J}_m V_{opt}(e_k) | k \rangle \quad (4.5.10)$$

gesetzt wurde (vgl. (4.2.1)), sollte man eigentlich annehmen, daß die berechneten Werte ein wenig zu klein herauskommen: Nimmt man nämlich der Einfachheit halber an, daß $\langle r' | W(e_k) | r \rangle$ lokal ist, so gilt

$$\langle k^{(4)} | W(e_k) | k^{(4)} \rangle = \int d^3r |\langle r | k^{(4)} \rangle|^2 W(e_k, r). \quad (4.5.11)$$

Dies ist sicherlich kleiner als der aus der Born'schen Näherung folgende Ausdruck

$$\langle k | W(e_k) | k \rangle = \int d^3r W(e_k, r), \quad (4.5.12)$$

da die Streuwellen des optischen Potentials durch den Imaginärteil gedämpft werden. Im Falle eines Kastenpotentials $W(e_k, r) = W(e_k) \Theta(R-r)$ beispielsweise würde aus (12) folgen:

$$\langle k | W(e_k)_{Kasten} | k \rangle = V W(e_k) > W(e_k) \int_V d^3r |\langle r | k^{(4)} \rangle|^2,$$

so daß man ganz grob erwarten sollte, daß die Ergebnisse, die

aus (12) folgen, ungefähr mit einem Faktor

$$f(e_k) = \frac{V}{\int d^3r \langle r | \psi^{(+)} \rangle^2} > 1 \quad (4.5.13)$$

multipliziert werden müßten, um das korrekte Ergebnis zu bekommen. Nun ist es so, daß die lokale-Dichte-Näherung bei höheren Energien etwas zu große Reaktionsquerschnitte liefert, so daß dadurch ein ähnlicher Effekt wie Multiplikation mit einem Faktor der Form (13) erzielt wird. Wie erwähnt, sinkt $\Im m \psi_{opL}(E)$ bei Energien über etwa 500 MeV ab; dies beruht darauf, daß für diese Energien die Streuamplitude des Tabakin-Potentials „unphysikalisch“ wird, wie oben diskutiert wurde.

In den Abbildungen 5-17 sind die Ergebnisse der korrekten Modellrechnung ohne Umeichung wiedergegeben. Zunächst erkennt man, wie oben schon erwähnt, daß die Annahme eines nichtlokalen Imaginärteils zu etwas tieferen Realteilen des lokalen äquivalenten Potentials führt. Da die Nichtlokalität des Hartree-Fock-Potentials, die sich nach Fouriertransformation durch dessen Impulsabhängigkeit äußert, in allen Rechnungen (vgl.(4.3.14-17)) berücksichtigt wurde, kann man den Schluß ziehen, daß diese den Haupt-Nichlokalitätseffekt ausmacht.

Bei der Diskussion der radialen Abhängigkeit der berechneten Potentiale muß die lokale-Dichte-Annahme berücksichtigt werden. Nach Cugnon (Cu71) sollte diese bis zu etwa dem Radius, bei dem die Dichte auf etwa 15% ihres Maximalwertes abgefallen ist, vernünftig sein. Das ist bei den Rechnungen dieser Arbeit (vgl.(1)) bei 7.3 F der Fall. Der Radius, bei dem die Dichte auf die Hälfte ihres Mittelpunktwertes abgesunken ist („half density radius“) ist $R_0 = 6.38$ F. Er ist in den Abbildungen durch eine senkrechte gestrichelte Linie wiedergegeben. Die Potentiale erstrecken sich, wie erwartet, über die Dichteverteilung hinaus (im Mittel 0.3 F beim Realteil, 0.67 F beim Imaginärteil). Bei niedrigen Energien (25 - 50 MeV) weist der Imaginärteil ein deutliches absorptives Maximum an der Oberfläche auf. Es liegt bei 25 MeV Einschußenergie sogar außerhalb von R_0 . Diese Oberflächenab-

sorption verschwindet bei höheren Energien, im Einklang mit Ergebnissen experimenteller Analysen.

Abbildungsunterschriften

Abbildung 1: $\Im m V_{optL}(p)$ im Kerninneren ($p_F = 1.358 \text{ F}^{-1}$, $p = \sqrt{2mE}$, $R=0$). Zu einigen Impulswerten p sind die zugehörigen Energien E angegeben.

Abbildung 2: Das berechnete $\Im m V_{optL}(R=0, E)$ zusammen mit aus Experimenten ermittelten Daten. Diese wurden einer Kompilation von Passatore (Pa67) entnommen sowie dem Lehrbuch von Bohr u. Mottelson (BM69, S.172, gestrichelte Linie). Für Energien unter 100 MeV sollte man $\Im m V_{optL}(E)$ mit den Daten für Neutronen (Volumenabsorption) vergleichen, da die Coulombwechselwirkung in der Theorie nicht berücksichtigt wurde. Die durch „▼“ gekennzeichneten Punkte wurden nach (Pa67, Formel (3.3)) aus experimentellen Nukleon-Nukleon-Wirkungsquerschnitten ermittelt.

Abbildung 3: $\Im m V_{optL}(R=0, E)$ zusammen mit $Re V_{optL}(R=0, E)$ und $V_d(R=0, E)$ im Kerninneren ($p_F = 1.358 \text{ F}^{-1}$). I: $\Im m V_{optL}(R=0, E)$. II: $Re V_{optL}(R=0, E)$ bei Annahme eines im Ortsraum nichtlokalen $\Im m V_{optL}(E)$ (vgl. (4.3.17)). III: $Re V_{optL}(R=0, E)$ bei Annahme eines im Ortsraum lokalen $\Im m V_{optL}(E)$. IV: Mittels der in 4.5 beschriebenen Methode umgeeichte Kurve III. V: Der zu IV gehörende umgeeichte dispersive Anteil $V_d(R=0, E)$ des optischen Potentials (vgl. Formel (4.5.9)). VI: Der zu I gehörende dispersive Anteil $V_d(R=0, E)$ von $Re V_{optL}$. VII: Der zu II gehörende dispersive Anteil. Nach Umzeichnung ergibt VII die Kurve V.

Abbildung 4: Das berechnete $Re V_{opt_L}(R=0, E)$ (Kurven III und IV von Abb. 3) zusammen mit aus Experimenten ermittelten Daten (Pa67). ~~Wie bei Abb. 2 sollte man bei niedrigeren Energien mit den Neutronen-Daten (Volumenabsorption) vergleichen.~~ (I, II) entsprechen (III, IV) aus Abb. 3.

Abbildungen 5-17: Radiale Abhängigkeit der verschiedenen Potentiale bei angegebener Einschußenergie E .
 VRNL: $Re V_{opt_L}(R, E)$ bei Annahme eines nicht-lokalen $\mathcal{I}_m V_{opt}(E)$ im Ortsraum. VRL: $Re V_{opt_L}(R, E)$ bei Lokalisierungsannahme für $\mathcal{I}_m V_{opt}$. VDNL bzw. VDL: Die zu VRNL bzw. VRL gehörenden dispersiven Anteile von $Re V_{opt}$. VHF: Hartree-Fock-Anteil von $Re V_{opt}$. Die durchgezogene (gestrichelte) Kurve gehört zu VRNL (VRL). VIM: $\mathcal{I}_m V_{opt_L}(R, E)$. Die Umeichung von VRL bei $R=0$ erfordert eine Multiplikation mit dem angegebenen Faktor f .
 (R_0 = Halbe-Dichte - Radius)

ABB. 1

(Bildunterschriften S. 58 f)

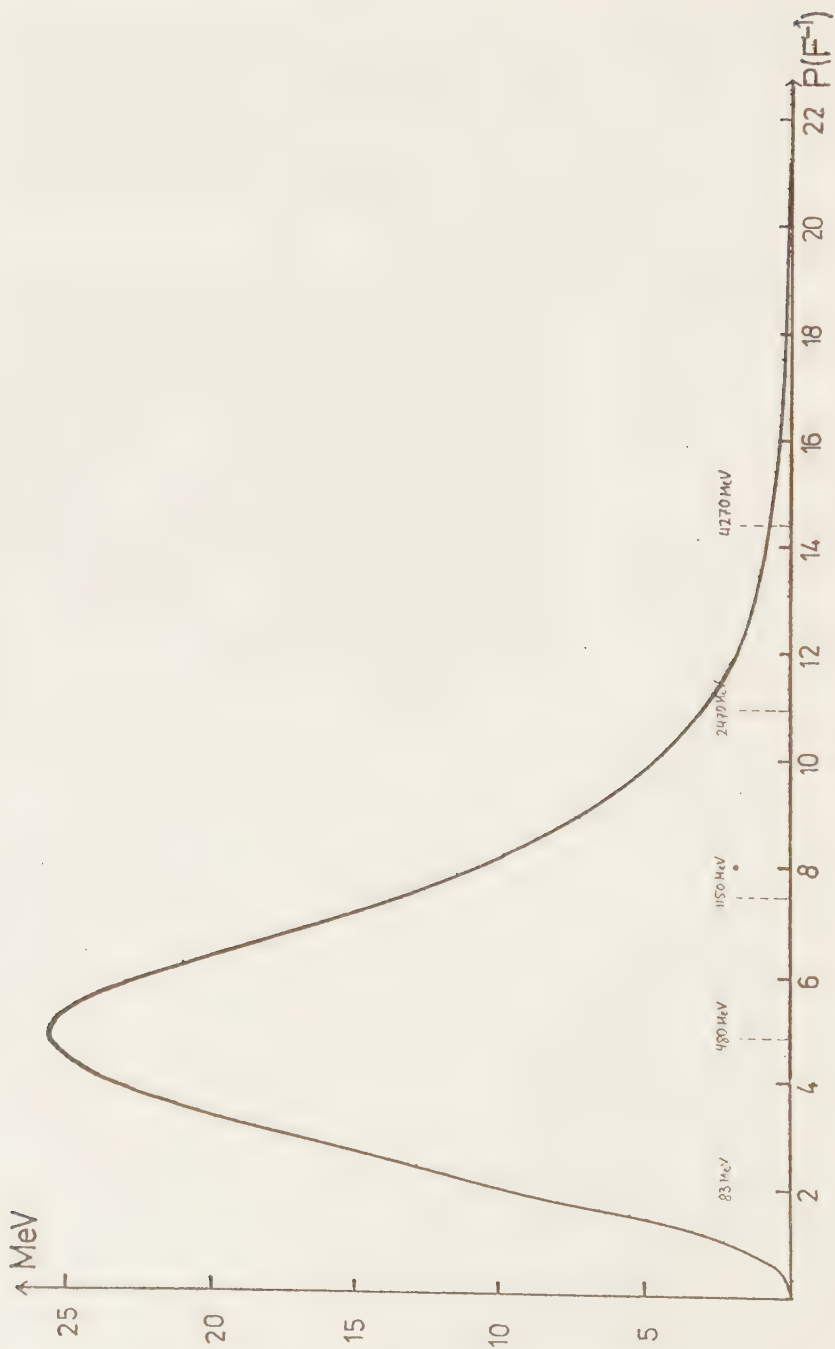


ABB.2 (Bildunterschriften S.58 f)

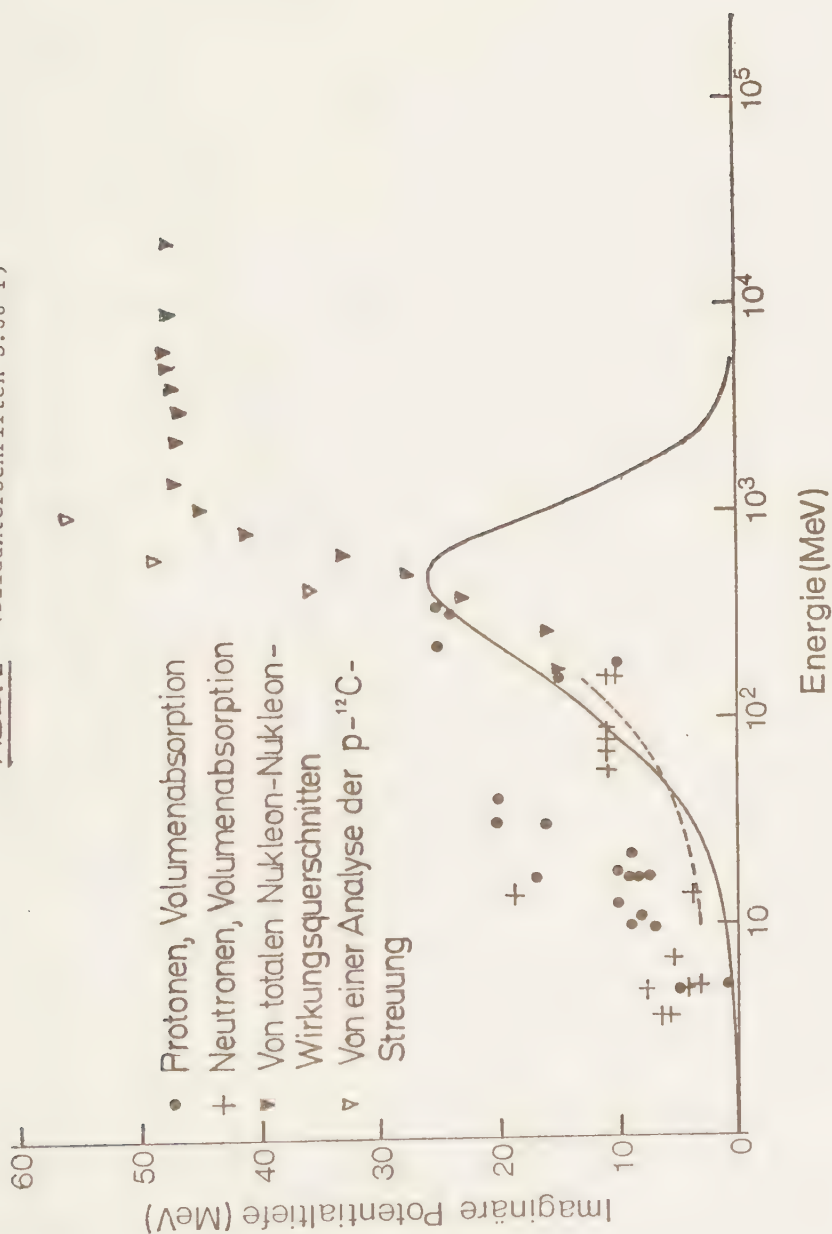
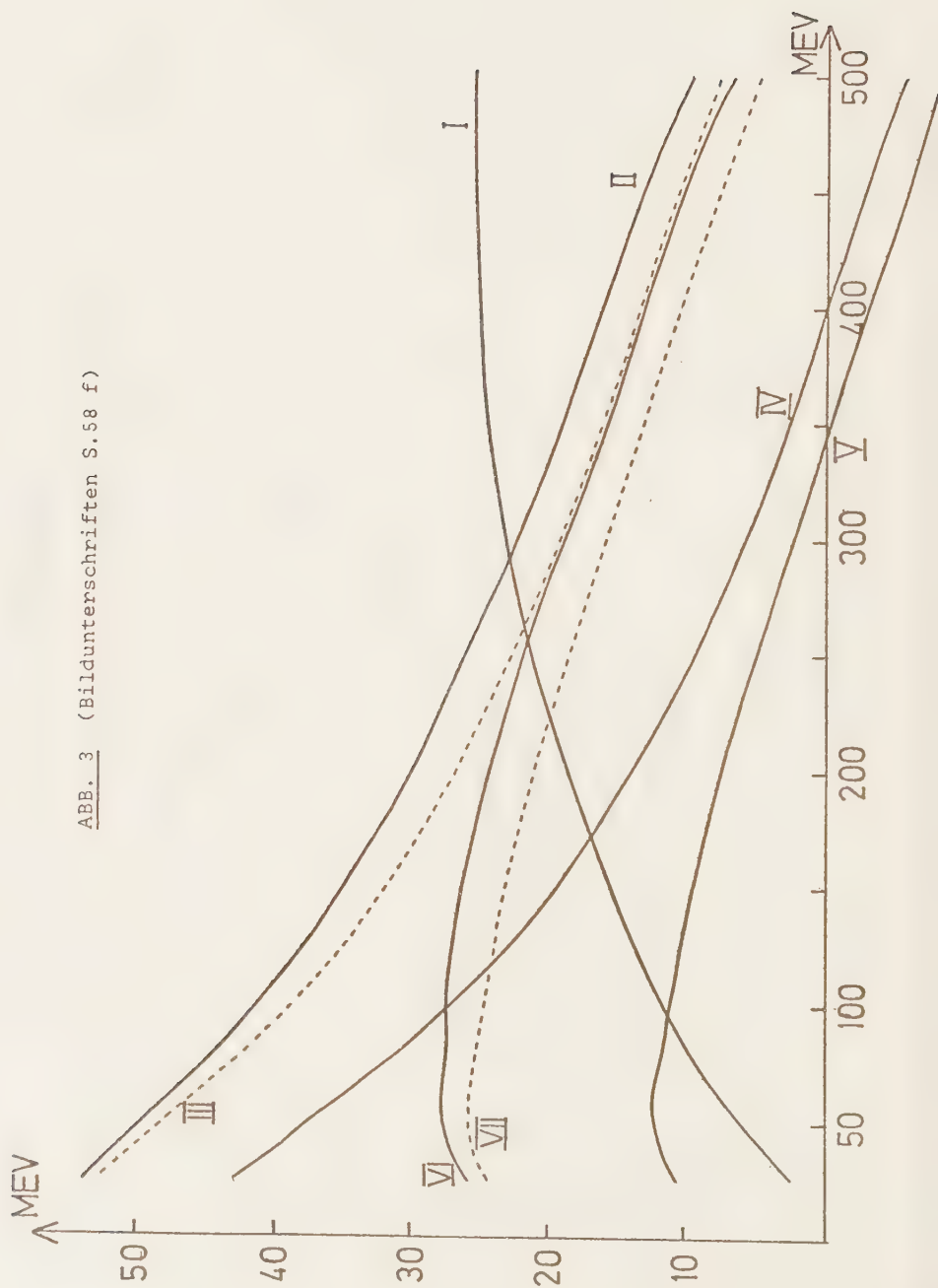


ABB. 3 (Bildunterschriften S.58 f)



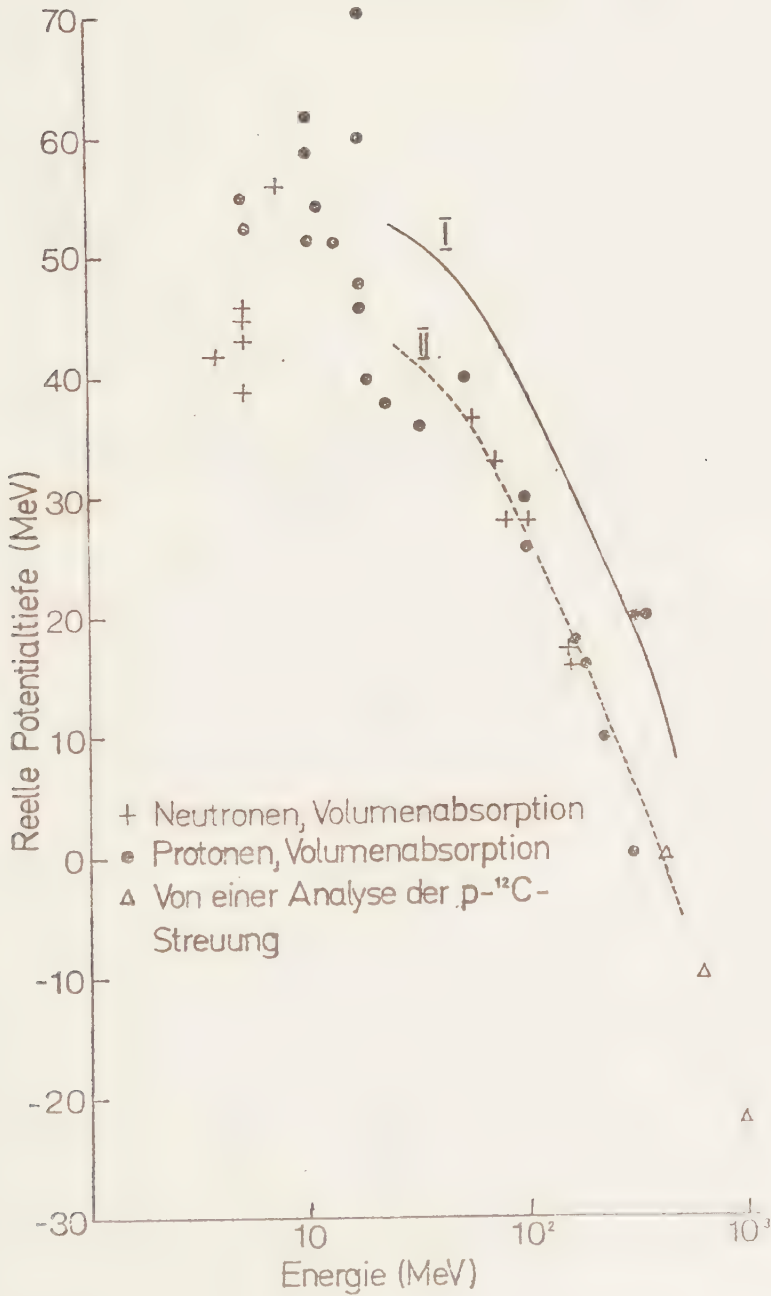


ABB. 4 (Bildunterschriften S. 58 f)

ABB. 5 (Bildunterschriften S.58 f)

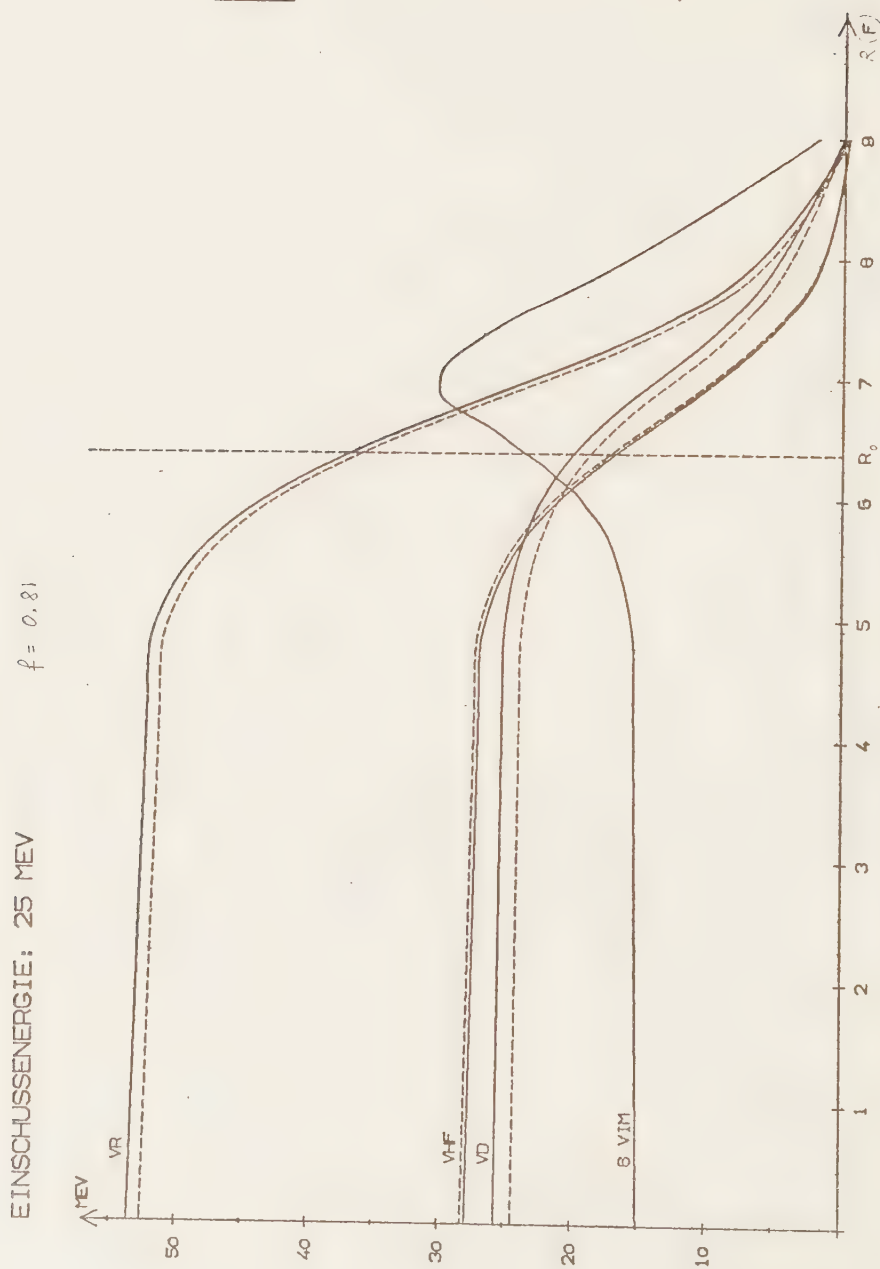


ABB. 6 (Bildunterschriften S.58 f)

$\beta = 0.778$

EINSCHUSSENERGIE: 50 MEV

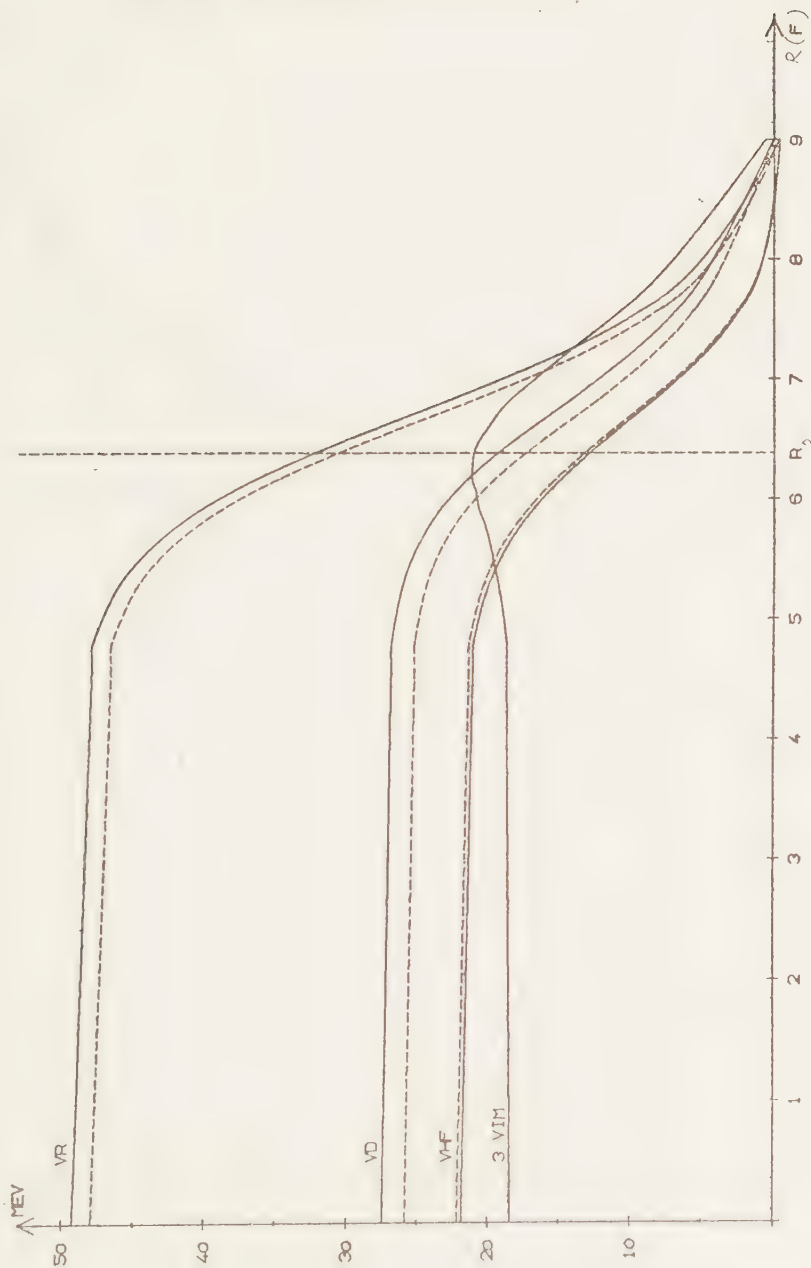


ABB. 7 (Bildunterschriften S.58 f)

EINSCHUSSENERGIE: 75 MEV
 $\phi = 0.739$

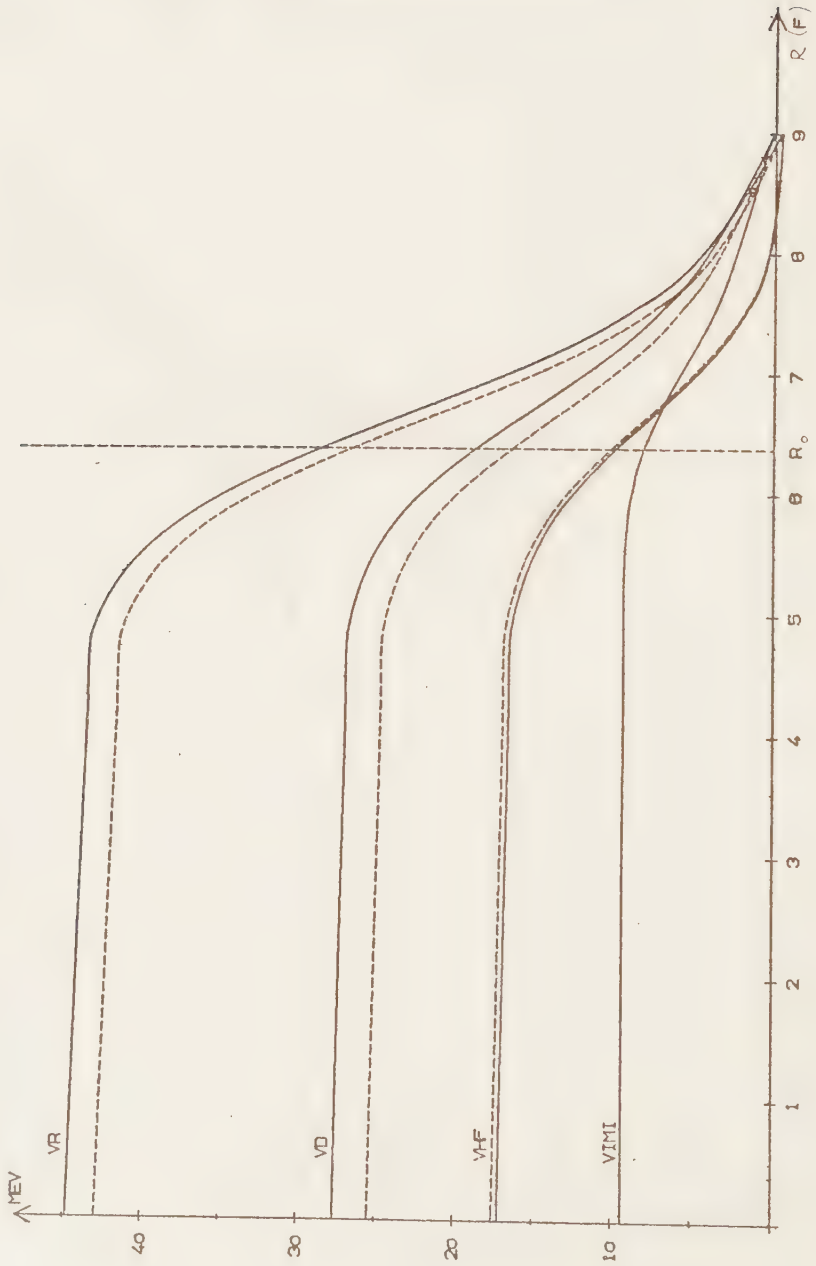


ABB. 8 (Bildunterschriften S.58 f)

EINSCHUSSENERGIE: 100 MEV

$f \approx 0.697$

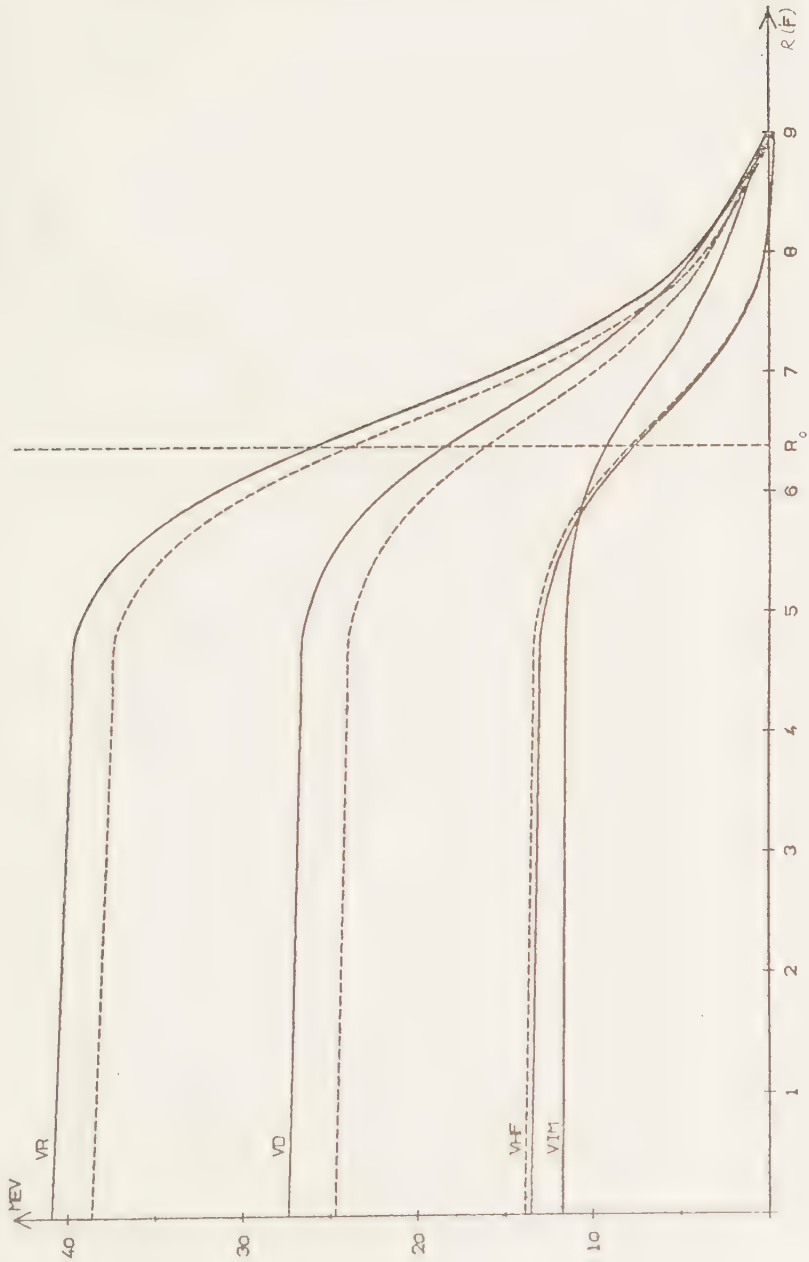


ABB. 9 (Bildunterschriften S.58 f)

$f = 0.654$

EINSCHUSSENERGIE: 125 MEV

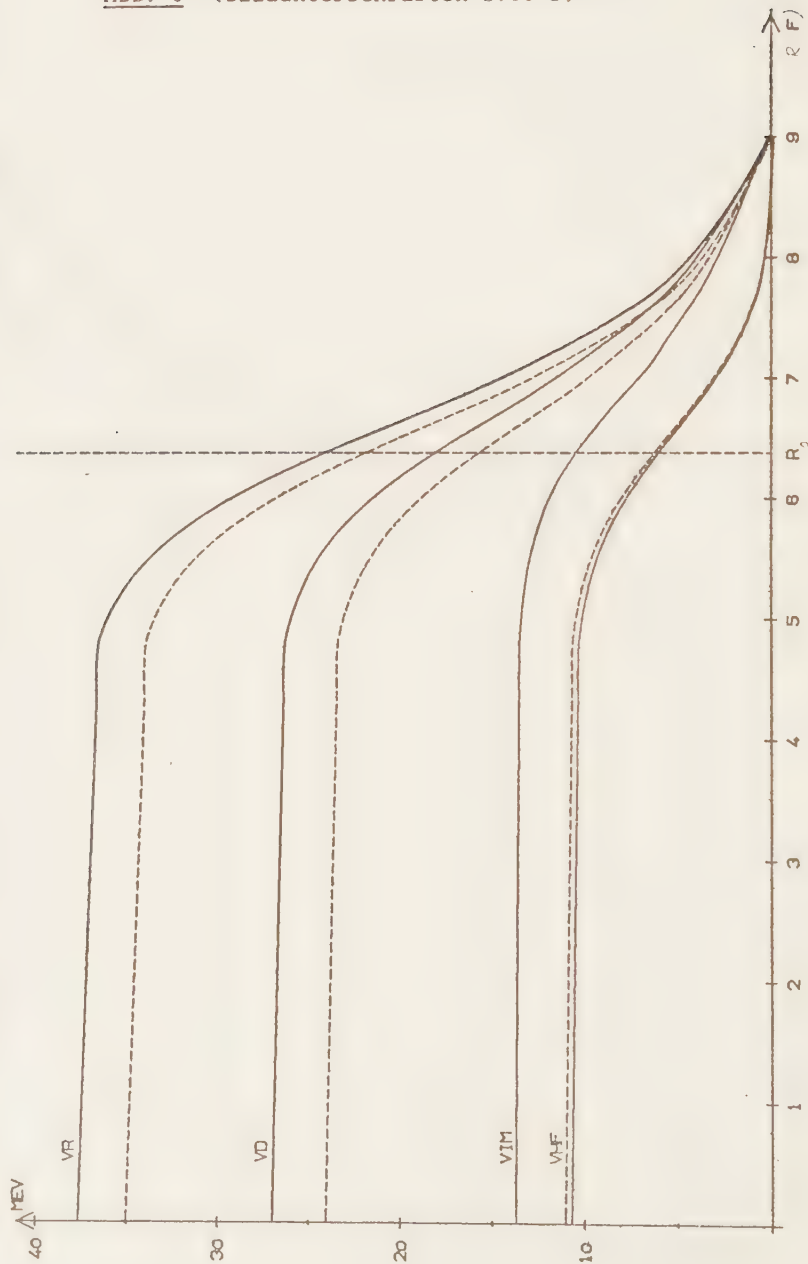


ABB. 10 (Bildunterschriften S.58 f)

$\beta = 0.609$

EINSCHUSSENERGIE: 150 MEV

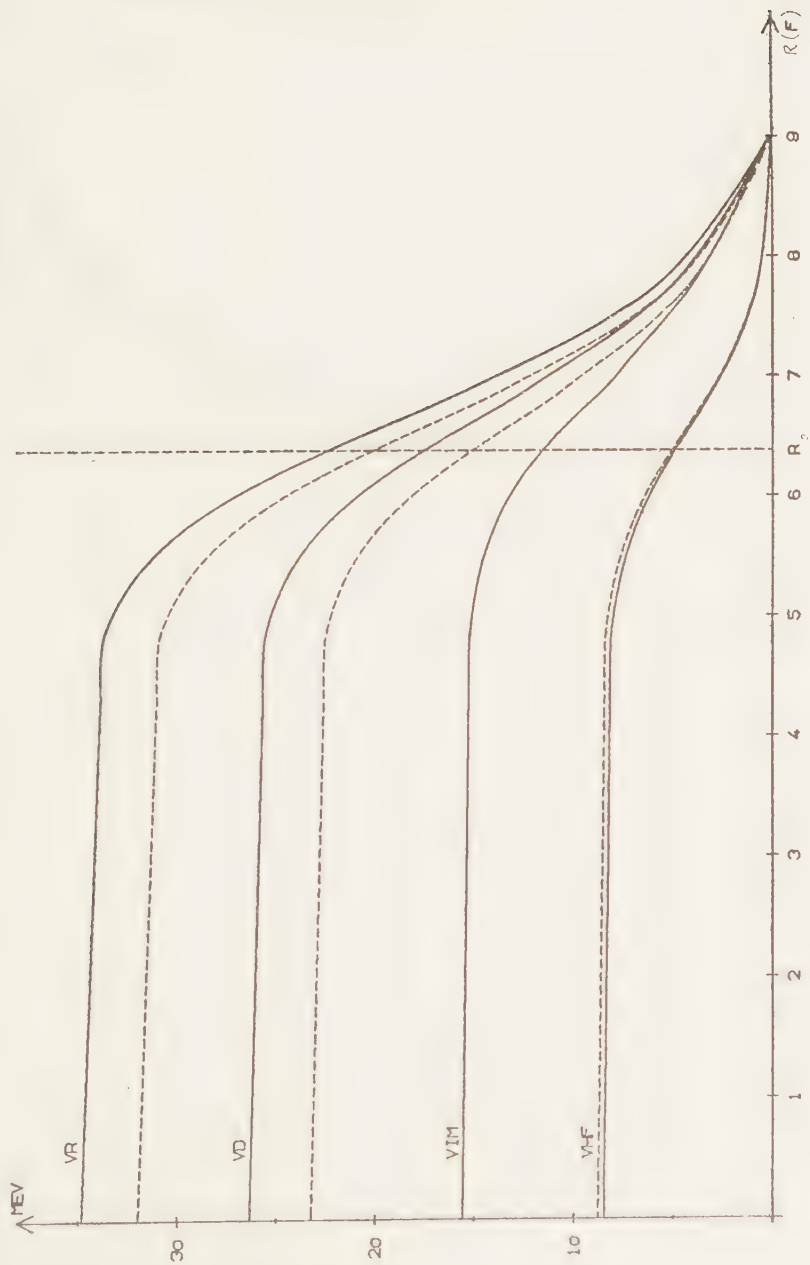


ABB. 11 (Bildunterschriften S.58 f)

$f = 0.517$

EINSCHUSSENERGIE: 200 MEV

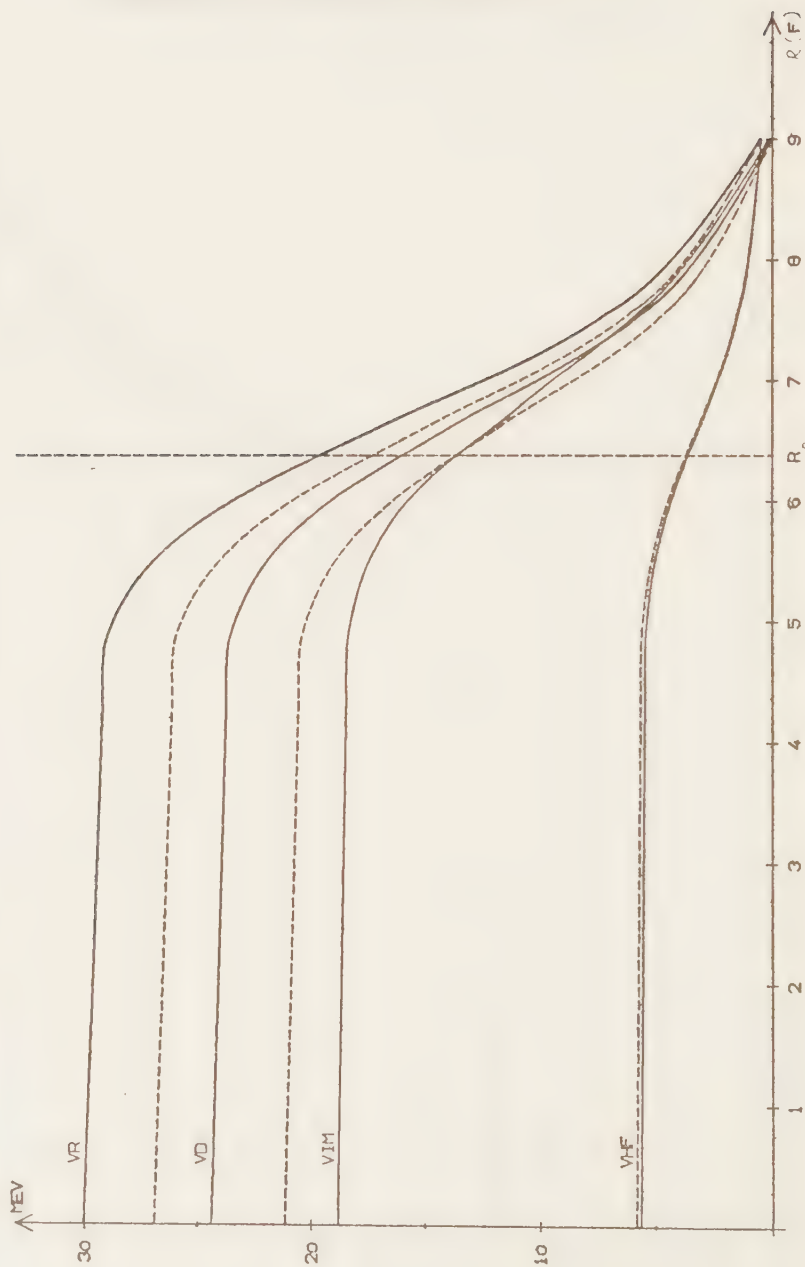


ABB. 12 (Bildunterschriften S.58 f)

$\beta = 0,417$

EINSCHUSSENERGIE: 250 MEV

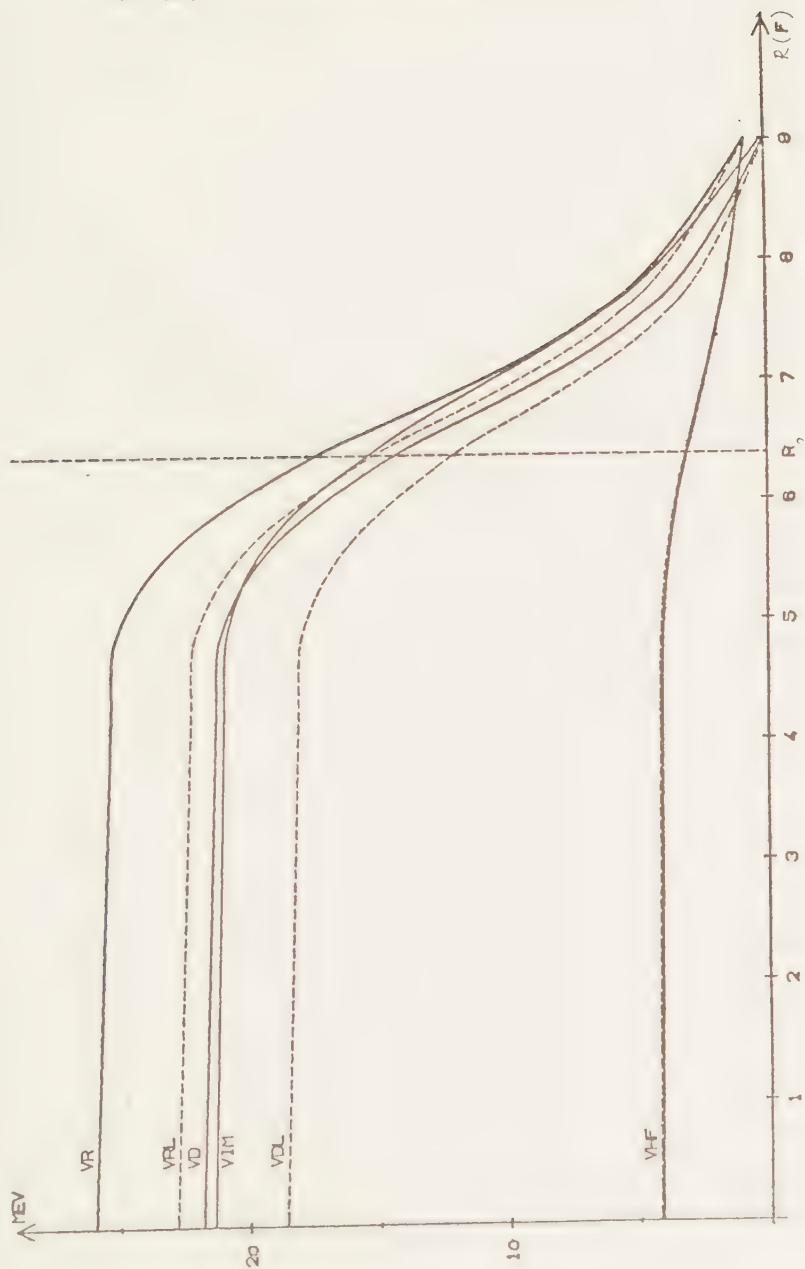


ABB. 13 (Bildunterschriften S.58 f)

EINSCHUSSENERGIE: 300 MEV

$\beta = 0.301$

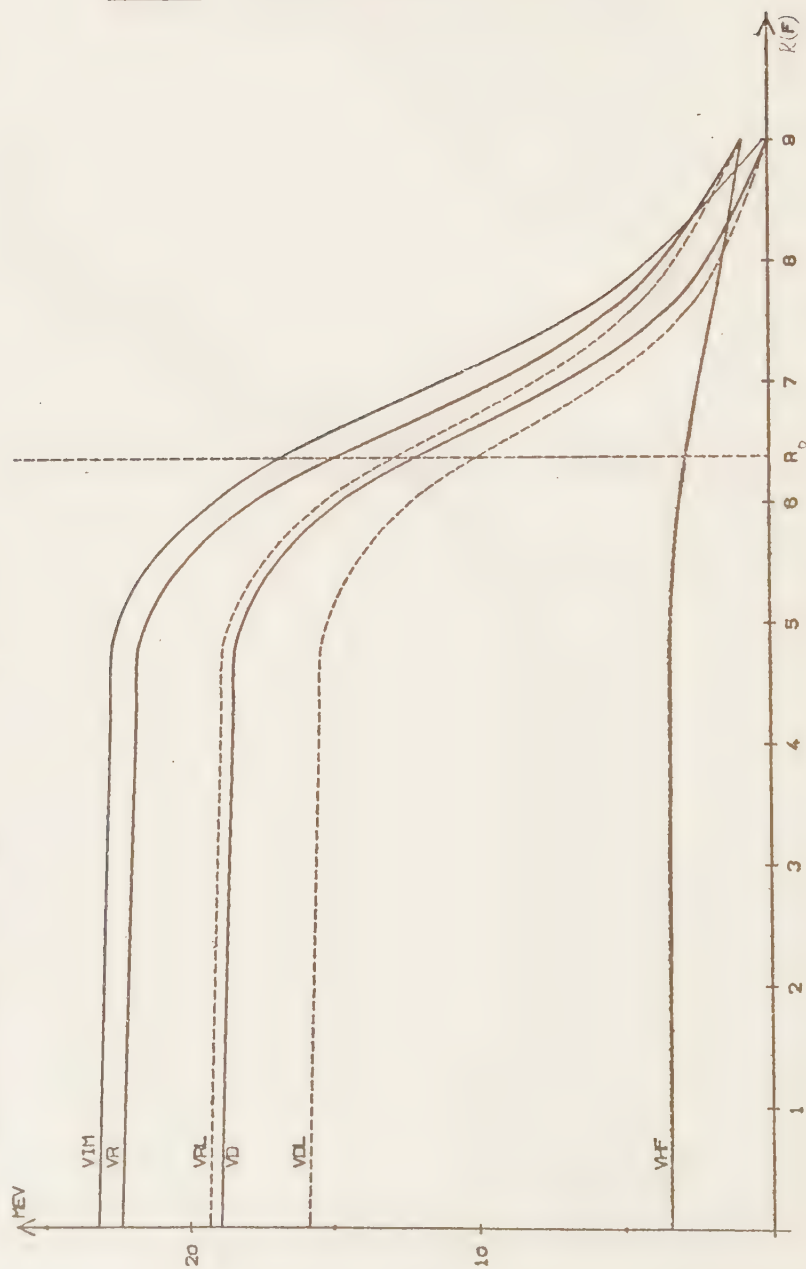


ABB. 14 (Bildunterschriften S.58 f)

EINSCHUSSENERGIE: 350 MEV

$\beta = 0.164$

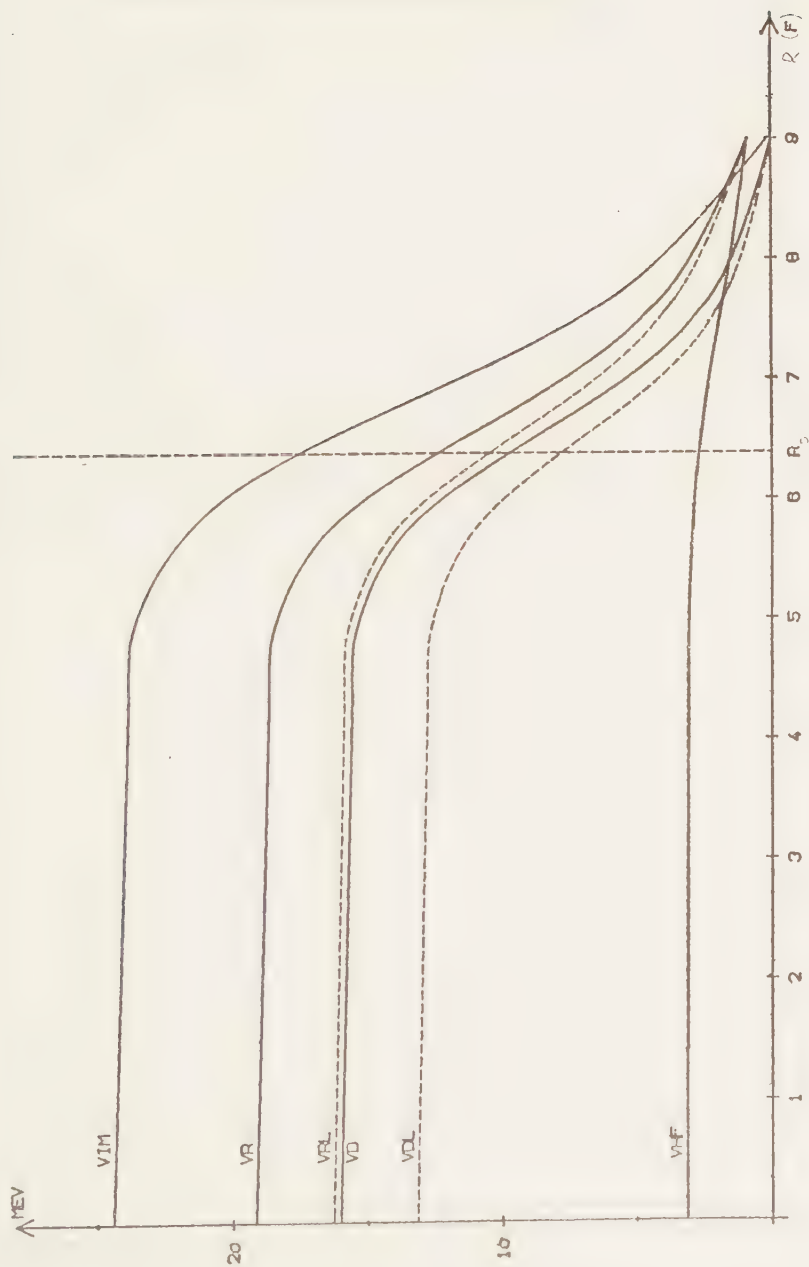


ABB. 15 (Bildunterschriften S.58 f)

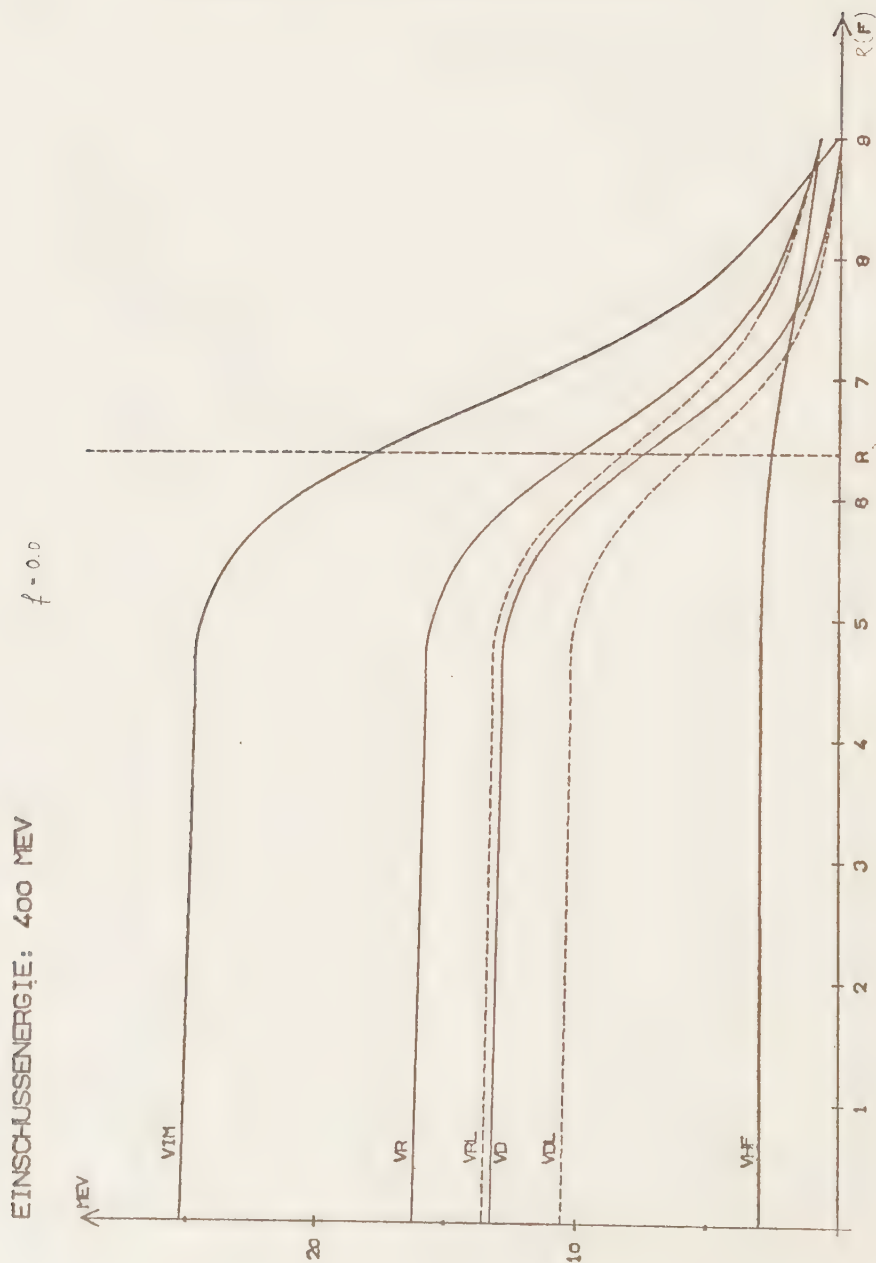


ABB. 16 (Bildunterschriften S.58 f)

EINSCHUSSENERGIE: 450 MEV

$\beta = 0.9992$

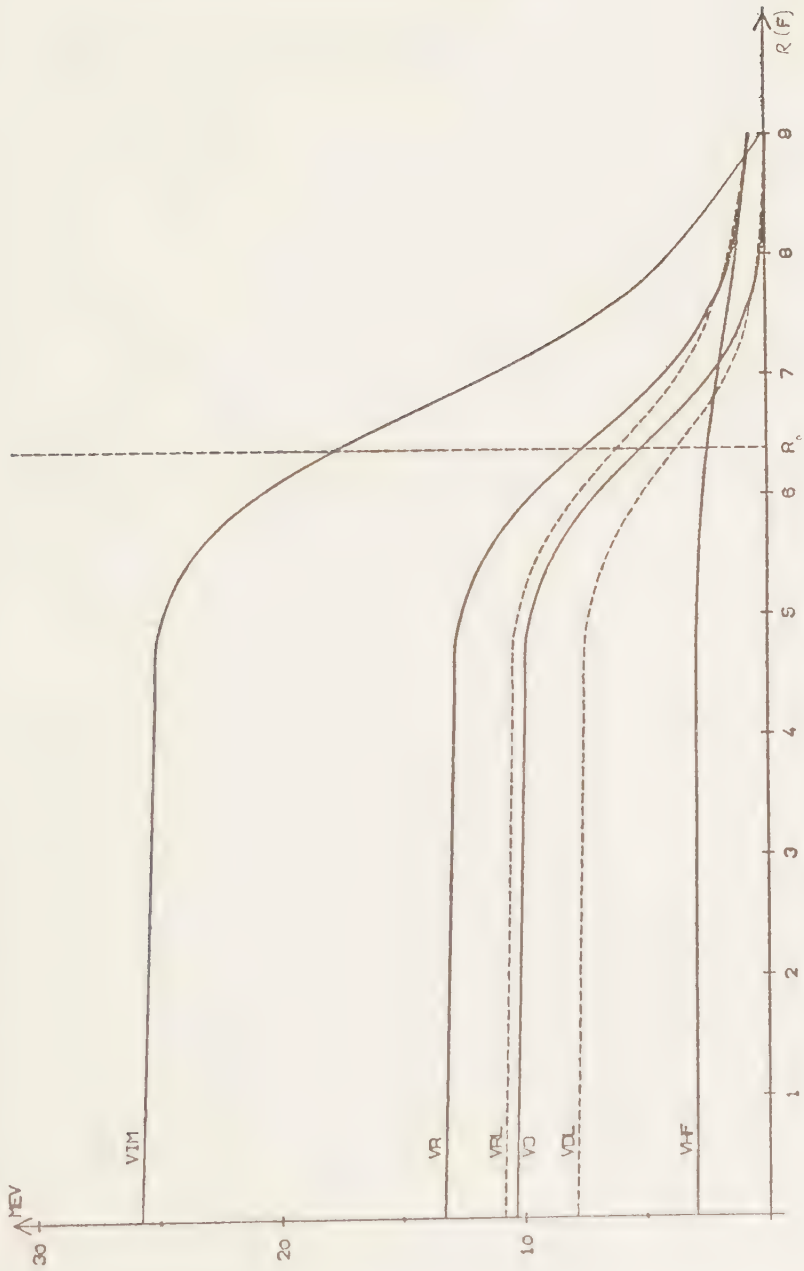
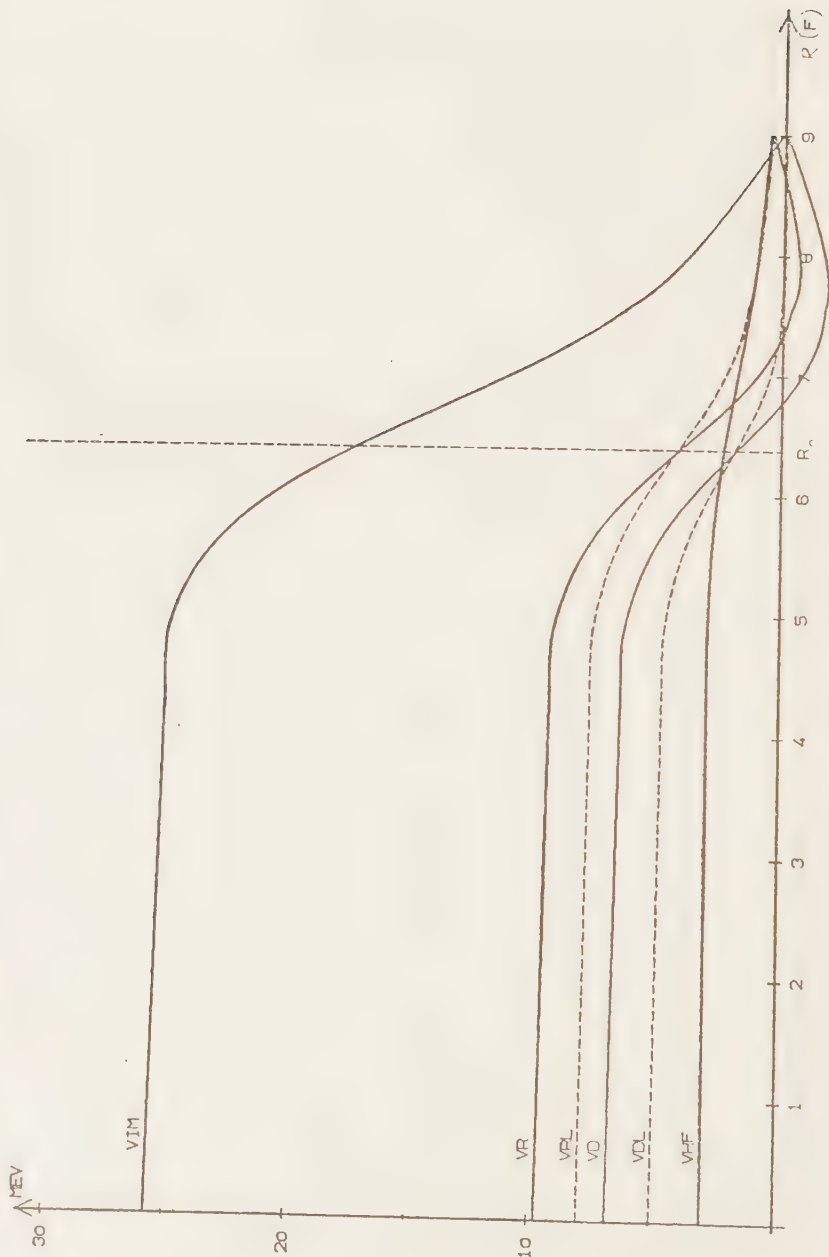


ABB. 17 (Bildunterschriften S.58 f)

$f = - 0.73$

EINSCHUSSENERGIE: 500 MEV



Anhang

A.1 Die normalen Green'schen Funktionen; Dyson-Gleichung und Bethe-Salpeter-Gleichungen

Als Definition der normalen n-Teilchen- (2n-Punkt-)Funktionen benützen wir (Mig66)

$$g_{j \dots n, i' \dots n'}^{(n)} = (-i)^n \langle 0 | T (a_j(t_1) \dots a_n(t_n) a_{n'}^+(t_{n'}) \dots a_1^+(t_1)) | 0 \rangle$$

$$= (-i)^n \sum_{P(1 \dots n, n' \dots n')} \langle 0 | \psi_P(t_{j_P}) \dots \psi_{P'}(t_{j_{P'}}) | 0 \rangle \theta(t_{j_1} - t_{j_2}) \dots \theta(t_{j_{2n}} - t_{j_{2n-1}}), \quad (\text{A.1.1})$$

$$\psi_i = \begin{cases} a_i & i = 1, \dots, n \\ a_i^+ & i = i', \dots, n' \end{cases} \quad \text{für} \quad \theta(\tau) = \begin{cases} 0 & \tau < 0 \\ e^{-\sigma\tau} & \text{für} \quad \tau > 0 \end{cases}$$

in selbstevidenter Notierung. Man kann nun durch Anwendung des „Schrödingeroperators“ S:

$$S_{13} := -i \hbar \delta_{13} \frac{\partial}{\partial t_1} + \left(\frac{p^2}{2m} \right)_{13} \delta(t_1 - t_3) \quad (\text{A.1.2})$$

auf die Green'schen Funktionen deren Bewegungsgleichungen herleiten (BW63, Pu61, RP63) und erhält so ein System von Integrodifferentialgleichungen, das in komplizierter Weise die n-Teilchen-Funktion mit den (n-1)- und (n+1)-Teilchen-Funktionen koppelt. Weiter kann man, z.B. mittels einer Funktionalableitungsmethode (BW63) bzw. mit graphischen Argumenten (No64) Integralgleichungen aufstellen, welche die n-Teilchen-Funktion mit den Funktionen gleichen und niedrigeren Grades verknüpft. In diesen Gleichungen treten dann komplizierte „Vertices“ bzw. effektive Wechselwirkungen auf, für die in praktischen Fällen (beispielsweise in der RPA-Theorie) nach einer Renormierungsprozedur phänomenologische Ansätze gemacht werden (s. z.B. Mig67). Für die Zweipunkt-Funktion gilt die Dyson-Gleichung

$$g_{11'} = g_{11'}^0 + g_{12}^0 \nu_{23} g_{31'} = g_{11'}^0 + g_{12}^0 T_{23} g_{31'} \quad (\nu := \text{"Massenoperator"}) \quad (\text{A.1.3})$$

(vgl. (10 a,b), 13-15)

sowie für die Vierpunkt-Funktion die Gleichung

$$g_{12'12'} = g_{11'} g_{22'} - g_{12'} g_{21'} + i g_{1\alpha'} g_{2\alpha_2} \Gamma_{\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2} g_{\beta_11'} g_{\beta_22'} \quad (\text{A.1.4})$$

($\Gamma :=$ „reduzierbarer Vertex“)

(Die Zeiten sind in den Indices inbegriffen; über doppelt vorkommende Indices wird summiert bzw. integriert.)

Mit Hilfe von „irreduziblen“ Vertices $K_{\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2}^{PP}$ (irreduzibel im Teilchen-Teilchen-Kanal), vgl. (3.4.6), und $K_{\alpha_1\beta_2\alpha_2\beta_1}^{Ph}$ (irreduzibel im „ersten“ Teilchen-Loch-Kanal, vgl. (3.4.5)), kann man für $g^{(2)}$ alternativ schreiben:

$$g_{12'12'} = g_{11'} g_{22'} - g_{12'} g_{21'} + i g_{1\alpha'} g_{2\alpha_2} K_{\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2}^{PP} g_{\beta_1\beta_2} g_{12'} \quad (\text{A.1.5})$$

$$\text{sowie } L_{12'12'} := g_{12'12'} - g_{11'} g_{22'} = -g_{12'} g_{21'} - i g_{1\alpha'} g_{2\alpha_2} K_{\beta_1\alpha_2\alpha_1\beta_2}^{Ph} L_{\beta_2\alpha_2} g_{12'} \quad (\text{A.1.6})$$

Dies sind die sogenannten „Bethe-Salpeter-Gleichungen“. (5) eignet sich zur Behandlung von Teilchen-Teilchen-Problemen, (6) ist für das Teilchen-Loch-Problem adäquat. Für den reduzierbaren Vertex Γ gilt mit (4), (5) und (6)

$$\Gamma_{\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2} g_{\beta_1\delta_1} g_{\beta_2\delta_2} = K_{\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2}^{PP} g_{\beta_1\beta_2} \delta_1 \delta_2 \quad (\text{A.1.7})$$

$$\Gamma_{\beta_1\alpha_2\alpha_1\beta_2} g_{\beta_2\delta_2} g_{\alpha_2\alpha_1} = -K_{\beta_1\alpha_2\alpha_1\beta_2}^{Ph} L_{\beta_2\delta_2} \alpha_1 \delta_2 \quad (\text{A.1.8})$$

Die Bewegungsgleichungen für $g^{(1)}$ und $g^{(2)}$ lauten:

$$S_{21} g_{14} = -\delta_{24} - i V_{2\alpha\beta\gamma} g_{\beta\gamma\alpha^*4} \quad , \quad \text{a)}$$

$$(S_{02})^* g_{32} = -\delta_{03} - i g_{3\delta} \gamma_\beta V_{\beta\gamma 0\delta} \quad , \quad \text{b)}$$

(A.1.9)

$$S_{51} g_{1324} = \delta_{54} g_{32} - \delta_{52} g_{34} + i V_{5706} g_{6037^*24} \quad , \quad \text{c)}$$

$$(S_{64})^* g_{1324} = \delta_{16} g_{32} - \delta_{36} g_{12} - i g_{130^*275} V_{5760} \quad . \quad \text{d)}$$

Wegen der Beziehung $S_{12} g_{23}^0 = -\delta_{13}$ bzw. $(S_{32})^* g_{12}^0 = -\delta_{13}$ lassen sich (9 a-d) auch in der Form (10 a-d) schreiben:

$$g_{12} = g_{12}^0 - i g_{1\alpha}^0 V_{\alpha\beta\gamma\delta} g_{\delta\delta^*2\beta^*} \quad \text{a)}$$

$$= g_{12}^0 + i g_{1\alpha}^0 V_{\beta\gamma\delta\alpha^*} g_{\delta\delta^*2\beta^*}^0 \quad \text{b)}$$

$$g_{1324} = g_{12}^0 g_{34} - g_{14}^0 g_{32} + i g_{15}^0 V_{5709} g_{309247^*} \quad \text{c)}$$

(A.1.10)

$$= g_{12} g_{34}^0 - g_{32} g_{14}^0 + i g_{130^*275} V_{5760} g_{64}^0 \quad \text{d)}$$

$$= g_{12} g_{34} - g_{32} g_{14} + i g_{15} V_{5709} R_{309247^*} \quad \text{e)}$$

$$= g_{12} g_{34} - g_{32} g_{14} + i R_{0^*13752} V_{5760} g_{64} \quad \text{f)}$$

Die beiden letzten Gleichungen können als Definitionsgleichungen für die sogenannte „Sechspunkt-Antwertfunktion“ an-

gesehen werden, die im nächsten Abschnitt behandelt wird. Die Gleichungen (10 a und b) nennen wir zueinander adjungierte Gleichungen, ebenso (10 c und d) bzw. (10 e und f). Für die Integralgleichungen (5) und (6) gibt es auch eine adjungierte Form, in der die gekoppelten Propagatoren links von der irreduziblen Wechselwirkung K^{PP} bzw. K^{Ph} stehen. Sie lauten:

$$g_{12,1'2'} = g_{11'} g_{22'} - g_{12'} g_{21'} + i g_{12} \alpha_1 \alpha_2 K_{\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2}^{PP} g_{\beta_1 1'} g_{\beta_2 2'} \quad (A.1.11)$$

$$\text{und } L_{12,1'2'} = -g_{12'} g_{21'} - i L_{1\alpha_1 1' \beta_1} K_{\beta_1 \alpha_2 \alpha_1 \beta_2}^{Ph} g_{2\alpha_2} g_{\beta_2 2'} . \quad (A.1.12)$$

Vergleicht man (3) mit (10 a,b), so erhält man die Definitionsgleichung des Massenoperators v :

$$v_{\alpha\beta} g_{\beta\epsilon} = -i V_{\alpha\beta\gamma\delta} g_{\gamma\delta} \epsilon\beta^+ , \quad (A.1.13)$$

$$g_{\alpha\beta} v_{\beta\epsilon} = -i g_{\alpha\delta} \delta^{-\beta\gamma} V_{\beta\gamma\epsilon\delta} , \quad (A.1.14)$$

$$\text{sowie } (S + v)_{12} g_{23} = -\delta_{13} . \quad (A.1.15)$$

(15) ist die "differentielle" Form der Dysongleichung (3). Nach Fouriertransformation in den Ortsraum lautet sie:

$$(e \delta_{12} - K_{12} - v_{12}(e)) g_{23}(e) = \delta_{12} . \quad (A1.15')$$

(K ist der Operator der kinetischen Energie)

A.2 Integralgleichungen für die Sechspunkt-Antwortfunktion

Man definiert die Sechspunkt-Antwortfunktion (pph-response-function) $R^{(3)}$ gemäß den Formeln (A.1.10 e,f), d.h.: Ersetzt man in den Bewegungsgleichungen (A.1.10 c,d) für $g^{(2)}$ die freie Green-Funktion g^0 durch die exakte Green-Funktion g , so muß $g^{(3)}$ durch $R^{(3)}$ ersetzt werden. Aus den Definitionsgleichungen von $R^{(3)}$ errechnet man unter Verwendung der Bewegungsgleichungen der $g^{(1)}$ -Funktion (A.1.10 a,b) die Beziehung

$$R_{\beta'2'1'2'3}^{(3)} = g_{\beta'1'1'2'4}^{(1)} - g_{1'3\alpha} (g^{-1})_{\alpha\beta} g_{\beta\beta'1'2'}^{(1)} . \quad (\text{A.2.1})$$

(Der unkorrelierte Term von $R^{(3)}$ läßt sich leicht bestimmen: Von den $3!=6$ freien Termen von $g^{(3)}$ werden durch den zweiten Summanden von (1) folgende wieder abgezogen: $\{g_{13}g_{21}, g_{3'2'}, (1 \leftrightarrow 2)\} - \{1' \leftrightarrow 2'\}$. Es bleiben übrig: $g_{33}, (g_{11}, g_{22}, g_{12}, g_{21})$: Dies ist der unkorrelierte Term eines Propagators, der die 2p-1h- bzw. 2h-1p-Bewegung beschreibt.)

Aus der Definition des Massenoperators (A.1.13,14) und

$$v_{11'} = v_{11'}^{HF} + v_{11'}^R , \quad (\text{A.2.2})$$

$$v_{11'}^{HF} = -2i V_{1\alpha 1'\beta} g_{\beta\alpha^*} , \quad (\text{A.2.3})$$

folgt durch Einsetzen von (A.1.10 e) in (A.1.14):

$$v_{11'}^R = V_{1\beta \gamma \delta} R_{\beta' \gamma \delta} \gamma' \delta' \beta V_{\delta' \delta' 1' \beta'} . \quad (\text{A.2.4})$$

Da der Massenoperator keine Bestandteile hat, die durch Zerschneiden einer g^0 -Linie in zwei Teile geteilt werden können, gilt wegen (4) dasselbe auch für die pph-Antwortfunktion $R^{(3)}$.

Diese ist also als pph- bzw. hhp-Propagator zu deuten und enthält keine Terme der Art  mit einer einzelnen intermediären g-Linie. Mit dem oben berechneten unkorrelierten Term kann man also eine im pph-Kanal irreduzible Wechselwirkung $K^{(3)}$ definieren (ES69, Wi72) gemäß der Gleichung

$$R_{3'12'1'2'3} = g_{3'3} (g_{11'} g_{22'} - g_{12'} g_{21'}) + \quad (A.2.5)$$

$$+ g_{\alpha_3 3} g_{1\alpha_1} g_{2\alpha_2} K_{\beta_3 \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2 \alpha_3} R_{3'\beta_1 \beta_2 1'2'\beta_3} .$$

Dabei lassen sich von der effektiven pph-Wechselwirkung $K^{(3)}$ drei Arten von faktorisierenden Termen abspalten, welche die Wechselwirkungen der pp- und der ph-Unterprobleme enthalten; der Rest ist eine effektive pph-Dreikörperkraft:

$$K_{3'12'1'2'3} = -i (g^{-1})_{11'} K_{3'2'2'3}^{ph} - i (g^{-1})_{22'} K_{3'1'1'3}^{ph} + i (g^{-1})_{3'3} K_{12'1'2'}^{pp} + K_{3'12'1'2'3}^{pph} . \quad (A.2.6)$$

K^{pp} und K^{ph} sind durch (A.1.5,6) definiert. Man kann nun die Integralgleichung (5) für $R^{(3)}$ derart umschreiben, daß man von der vollen Wechselwirkung $K^{(3)}$ einen der ph-Wechselwirkungsterme bzw. den pp-Term von Gleichung (6) abzieht. Man erhält dann Integralgleichungen, in denen anstelle des freien Terms von (5) ein solcher auftritt, bei dem ein Teilchen-Loch- bzw. ein Teilchen-Teilchen-Paar schon gekoppelt ist. Im Einzelnen sei (s. Wi75)

$$K_{3'12'1'2'3}^{(pp)} := K_{3'12'1'2'3} - i (g^{-1})_{3'3} K_{12'1'2'}^{pp} , \quad (A.2.7)$$

$$K_{3'12'1'2'3}^{(ph_3)} := K_{3'12'1'2'3} + i (g^{-1})_{22'} K_{3'1'1'3}^{ph} , \quad (A.2.8)$$

$$K_{3'12'12'3}^{(p_2 h_3)} = K_{3'12'12'3} + i (g^{-1})_{11'} K_{3'2'2'3}^{ph} \quad (\text{A.2.9})$$

Aus der Beziehung $K_{3'12'12'3} = K_{3'2'12'1'3}$, (A.2.10)

welche man mittels (5) und

$$R_{3'12'12'3} = - R_{3'2'12'1'3} = - R_{3'12'2'1'3} = R_{3'2'12'1'3} \quad (\text{A.2.11})$$

erhält, folgt zunächst $K_{3'12'12'3}^{pph} = K_{3'2'12'1'3}^{pph}$, (A.2.12)

woraus, zusammen mit Gleichung (6) der Zusammenhang

$$K_{3'12'12'3}^{(p_2 h_3)} = K_{3'2'12'1'3}^{(p_2 h_3)} \quad (\text{A.2.13})$$

resultiert.

Nun setze man beispielsweise (7) in (5) ein (schematisch):

$$R = g_h (g g - \tilde{g} \tilde{g}) + g_h g g (K^{pp} + i g_h^{-1} K^{pp}) R$$

Die unterstrichenen Terme forme man mittels (A.1.5) um. Es folgt

$$R = g_h (g^{(2)} - i g g K^{pp} g^{(2)}) + g_h (g^{(2)} + \tilde{g} \tilde{g} - i g g K^{pp} g^{(2)}) \cdot (K^{(10)} + i g_h^{-1} K^{pp}) R$$

Nun muß man (A.1.5) in dessen adjungierter Form (schematisch):

$$g^{(2)} = g g - \tilde{g} \tilde{g} + i g^{(2)} K^{pp} g g$$

verwenden, sowie die Symmetrierelation

$$\{ i g_{12 \alpha_1 \alpha_2} K_{\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2}^{PP} g_{\beta_1 \beta_2} \} = - \{ 1' \leftrightarrow 2' \} , \quad (\text{A.2.14})$$

schematisch: $g^{(2)} K^{PP} g g = - g^{(2)} K^{PP} \tilde{g} \tilde{g}$. Dann gilt:

$$R = g_h (g^{(2)} - \underline{i g g K^{PP} g^{(2)}}) + g_h (g^{(2)} + \tilde{g} \tilde{g}) K^{(PP)} R + \\ + i (\underline{g^{(2)} + \tilde{g} \tilde{g}}) \underline{K^{PP} R} - \underline{i g_h g g K^{PP} g^{(2)} K R} .$$

Der unterstrichene Term $i g^{(2)} K^{PP} R$ wird mit (5) umgeformt zu

$$\underline{i g^{(2)} K^{PP} g_h g g} - \underline{i g^{(2)} K^{PP} g_h \tilde{g} \tilde{g}} + \underline{i g^{(2)} K^{PP} g_h g g K R} .$$

Die bezeichneten Terme heben sich weg, und es bleibt übrig:

$$R - g_h g^{(2)} + g_h g^{(2)} K^{(PP)} R + g_h \tilde{g} \tilde{g} K^{(PP)} R + i \tilde{g} \tilde{g} g_h g^{(2)} K^{PP} - i g^{(2)} K^{PP} \tilde{g} \tilde{g} g_h .$$

Der letzte Term ist wegen (14) gleich $i g^{(2)} K^{PP} g_h g g - g_h (g^{(2)} - \tilde{g} \tilde{g})$
Der dritte und vierte Term werden zusammengefaßt zu

$$g_h \tilde{g} \tilde{g} K R - g_h g g K R \stackrel{(5)}{=} - R + g_h (g g - \tilde{g} \tilde{g}) .$$

Als Endresultat folgt

$$R_{3'12'12'3} = g_{33'} g_{12'12'} + g_{\alpha_3 3} g_{12 \alpha_1 \alpha_2} \cdot \frac{1}{2} K_{\delta_3 \alpha_1 \alpha_2 \delta_2 \alpha_3}^{(PP)} R_{3' \delta_3 \delta_2 12' \delta_3} . (\text{A.2.15})$$

$$\text{Statt } \frac{1}{2} K_{\delta_3 \alpha_1 \alpha_2 \delta_2 \alpha_3}^{(PP)} = \frac{1}{2} (-i (g^{-1})_{\alpha_1 \delta_1} K_{\delta_1 \alpha_2 \delta_2 \alpha_3}^{PP} - i (g^{-1})_{\alpha_2 \delta_2} K_{\delta_2 \alpha_1 \delta_1 \alpha_3}^{PP} + K_{\delta_3 \alpha_1 \alpha_2 \delta_2 \alpha_3}^{PP}) \quad (\text{A.2.16})$$

kann in (12) aus Symmetriegründen auch gesetzt werden:

$$-i(g^{-1})_{\alpha'\beta'} K_{\alpha_2\alpha_3}^{ph} + \frac{1}{2} K_{\alpha_2\alpha_3}^{pph} \quad \text{bzw.} \quad -i(g^{-1})_{\alpha_2\alpha_3} K_{\alpha'\beta'}^{ph} + \frac{1}{2} K_{\alpha_2\alpha_3}^{pph} \quad (\text{A.2.17})$$

Auf ganz ähnliche Weise kann man eine Teilchen-Loch-Wechselwirkung K^{ph} aus $K^{(3)}$ abspalten: Es ist

$$R = \underline{g\bar{g}g} - g_h \bar{g}\bar{g} + \underline{g\bar{g}g} \underbrace{(K^{(ph)} - i g^{-1} K^{ph})}_K R$$

Die unterstrichenen Terme formt man mittels (A.1.6) um. Es folgt

$$R = -Lg - \underline{i g g K^{ph} Lg} - \underline{g\bar{g}\bar{g}} - gL K^{(ph)} R - \\ - \underline{i g g g K^{ph} LKR} + \underline{i L g g^{-1} K^{ph} R}$$

Der hier unterstrichene Term ist

$$i L g g^{-1} K^{ph} R = \underline{i L K^{ph} g g g} - \underline{i L K^{ph} g \bar{g} \bar{g}} + \underline{i L K^{ph} g g g K R}$$

Die unterstrichelten Terme der beiden letzten Gleichungen lassen sich zusammenfassen zu gL , die unterschlängelten heben sich genau gegenseitig weg. Als Endresultat bekommt man die Gleichungen

$$R_{3'12' 1'2'3} = -g_{11'} L_{3'2'2'3} + g_{12'} L_{3'2'1'3} - \\ g_{101} L_{\alpha_3 2' \alpha_2 3} K_{\beta_3 \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2 \alpha_3}^{(ph)} R_{3'\beta_1 \beta_2 1'2'\beta_3} \quad (\text{A.2.18})$$

$$= -g_{22'} L_{3'1'1'3} + g_{21'} L_{3'1'2'3} \\ - g_{11'2'} L_{\alpha_3 1' \alpha_1 \beta_3} K_{\alpha_2 \alpha_1 \beta_1 \beta_2 \alpha_3}^{(ph)} R_{\alpha_2 \alpha_1 \beta_1 \beta_2 1'2'\beta_3} \quad (\text{A.2.18'})$$

Die zu (5), (15), (18), (18') adjungierten Gleichungen lauten

$$R_{3'12'1'2'3} = g_{3'3} (g_{11'} g_{22'} - g_{12'} g_{21'}) + \\ + R_{\alpha_3 12 \alpha_1 \alpha_2 3} K_{\beta_3 \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2 \alpha_3} g_{3' \beta_3} g_{\beta_1 1'} g_{\beta_2 2'} \quad (\text{A.2.19})$$

$$= g_{3'3} g_{12'1'2'} + \\ + R_{\alpha_3 12 \alpha_1 \alpha_2 3} \cdot \frac{1}{2} K_{\beta_3 \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2 \alpha_3}^{(pp)} g_{3' \beta_3} g_{\beta_1 \beta_2 1'2'} \quad (\text{A.2.20})$$

$$= -g_{11'} L_{3'2'2'3} + g_{12'} L_{3'2'1'3} - \\ - R_{\alpha_3 12 \alpha_1 \alpha_2 3} K_{\beta_3 \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2 \alpha_3}^{(p_2 h_3)} g_{\beta_1 1'} L_{3' \beta_2 2' \beta_3} \quad (\text{A.2.21})$$

$$= -g_{22'} L_{3'1'1'3} + g_{21'} L_{3'1'2'3} - \\ - R_{\alpha_3 12 \alpha_1 \alpha_2 3} K_{\beta_3 \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2 \alpha_3}^{(p_1 h_3)} g_{\beta_2 2'} L_{3' \beta_1 1' \beta_3} \quad (\text{A.2.22})$$

A.3 Gleichungen für die irreduziblen Vertices K^{ph} , K^{pp} sowie für den reduzierbaren Vertex Γ

Durch Vergleich der Integralgleichungen (A.1.4-6, 11, 12) für den Teilchen-Teilchen-Propagator $g^{(2)}$ und die lineare Antwortfunktion $L^{(2)}$ mit den Definitionsgleichungen (A.1.10 e, f) für die Sechspunkt-Antwortfunktion $R^{(3)}$ erhält man nach Einsetzen der für das jeweilige Problem passenden Integralgleichung für $R^{(3)}$ in einer der Formen (A.2.15, 18-22) Gleichungen für Γ , K^{pp} sowie K^{ph} . Dies soll an einem Beispiel demonstriert werden: Durch Vergleich von (A.1.10 f) mit (A.1.11) erhält man

$$i R_{0'12'75'1'} V_{5760} g_{62'} \stackrel{!}{=} i \left\{ g_{01'} g_{12'75} + g_{\alpha_1 1'} g_{12' \alpha_2} \cdot \frac{1}{2} K_{\delta_3 \alpha_1 \alpha_2 \delta_2 \alpha_3}^{(pp)} \right. \\ \left. + R_{0' \delta_1 \delta_2 75 \delta_3} \right\} V_{5760} g_{62'} =$$

$$= i \, g_{12 \alpha_1 \alpha_2} K_{\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2}^{PP} g_{\beta_1 \beta_2} g_{\beta_2 \beta_2} \quad .$$

Es folgt:

$$K_{\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2}^{PP} = V_{\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2} + \frac{1}{2} K_{\delta_3 \alpha_1 \alpha_2 \delta_2 \beta_1}^{(PP)} R_{\delta_3 \delta_2 \delta_2 \delta_3} V_{\delta_1 \delta_2 \delta_3 \beta_2} \quad (A.3.1)$$

$$= V_{\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2} + \frac{1}{2} K_{\delta_3 \alpha_1 \alpha_2 \delta_2 \beta_1}^{(PP)} g_{\delta_1 \delta_2 \delta_2 \delta_3} g_{\delta_3 \delta_3} K_{\delta_2 \delta_2 \delta_3 \beta_2}^{PP} \quad (A.3.2)$$

wobei die letzte Gleichung aus dem Vergleich von (A.1.10 f) und (A.1.11) folgt. Auf ganz analoge Weise gewinnt man folgenden Satz von Gleichungen:

$$K_{\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2}^{PP} = V_{\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2} + \frac{1}{2} V_{\alpha_1 \delta_3 \delta_2 \delta_2} R_{\delta_3 \delta_2 \delta_2 \delta_3} K_{\alpha_2 \delta_2 \delta_3 \beta_1 \beta_2}^{(PP)} \quad (A.3.1')$$

$$= V_{\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2} + \frac{1}{2} K_{\alpha_1 \delta_3 \delta_2 \delta_2}^{PP} g_{\delta_1 \delta_2 \delta_2 \delta_3} g_{\delta_3 \delta_3} K_{\alpha_2 \delta_2 \delta_3 \beta_1 \beta_2}^{(PP)} \quad (A.3.2')$$

$$K_{\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2}^{Ph} = 2 V_{\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2} + K_{\delta_3 \alpha_1 \alpha_2 \delta_2 \beta_1}^{(Ph_3)} R_{\delta_3 \delta_2 \delta_2 \delta_3} V_{\delta_1 \delta_2 \delta_3 \beta_2} \quad (A.3.3)$$

$$= 2 V_{\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2} + K_{\delta_3 \alpha_1 \alpha_2 \delta_2 \beta_1}^{(Ph_3)} L_{\delta_3 \delta_2 \delta_2 \delta_3} g_{\delta_2 \delta_2} K_{\delta_1 \delta_2 \delta_3 \beta_2}^{Ph} \quad (A.3.4)$$

$$= 2 V_{\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2} + V_{\alpha_1 \delta_3 \delta_2 \delta_2} R_{\delta_3 \delta_2 \delta_2 \delta_3} K_{\alpha_2 \delta_2 \delta_3 \beta_1 \beta_2}^{(Ph_1)} \quad (A.3.3')$$

$$= 2 V_{\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2} + K_{\alpha_1 \delta_3 \delta_2 \delta_2}^{Ph} g_{\delta_3 \delta_3} L_{\delta_2 \delta_3 \delta_3 \delta_2} K_{\alpha_2 \delta_2 \delta_3 \beta_1 \beta_2}^{(Ph_3)} \quad (A.3.4')$$

$$= 2 V_{\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2} - K_{\delta_3 \alpha_1 \alpha_2 \delta_2 \beta_1}^{(Ph_3)} R_{\delta_3 \delta_2 \delta_2 \delta_3} V_{\delta_1 \delta_2 \delta_3 \beta_2} \quad (A.3.5)$$

$$= 2 V_{\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2} - K_{\delta_3 \alpha_1 \alpha_2 \delta_2 \beta_1}^{(Ph_3)} L_{\delta_3 \delta_2 \delta_2 \delta_3} g_{\delta_2 \delta_2} K_{\delta_1 \delta_2 \delta_3 \beta_2}^{Ph} \quad (A.3.6)$$

$$= 2 V_{\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2} + V_{\alpha_1 \delta_3 \delta_1 \delta_2} R_{\delta_3 \delta_1 \delta_2 \gamma_1 \gamma_2 \delta_3} K_{\alpha_2 \gamma_1 \gamma_2 \beta_1 \beta_2 \gamma_3}^{(p_2 h_3)} \quad (\text{A.3.5'})$$

$$= 2 V_{\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2} - K_{\alpha_1 \delta_2 \delta_3 \delta_1}^{ph} g_{\delta_3 \delta_1} L_{\delta_1 \gamma_3 \delta_2 \gamma_2} K_{\alpha_2 \gamma_1 \gamma_2 \beta_1 \beta_2 \gamma_3}^{(p_2 h_3)} \quad (\text{A.3.6'})$$

$$\Gamma_{\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2} = 2 V_{\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2} + K_{\delta_3 \alpha_1 \alpha_2 \delta_1 \delta_2 \beta_1} R_{\delta_3 \delta_1 \delta_2 \gamma_1 \gamma_2 \delta_3} V_{\delta_1 \delta_2 \gamma_3 \beta_2} \quad (\text{A.3.7})$$

$$= 2 V_{\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2} + V_{\alpha_1 \gamma_3 \gamma_1 \gamma_2} R_{\delta_3 \gamma_1 \gamma_2 \delta_1 \delta_2 \gamma_3} K_{\alpha_2 \delta_1 \delta_2 \beta_1 \beta_2 \delta_3} \quad (\text{A.3.7'})$$

Es folgt mittels (1), (3) und (5)

$$\begin{aligned} & K_{\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2}^{ph} - K_{\alpha_2 \alpha_1 \beta_1 \beta_2}^{ph} + 2 K_{\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2}^{pp} = 6 V_{\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2} + \\ & + (K^{(p_1 h_3)} + K^{(p_2 h_3)} + K^{(pp)})_{\delta_3 \alpha_1 \alpha_2 \delta_1 \delta_2 \beta_1} R_{\delta_3 \delta_1 \delta_2 \gamma_1 \gamma_2 \delta_3} V_{\delta_1 \delta_2 \gamma_3 \beta_2} \quad (\text{A.2.12-13'}) \\ & = 6 V_{\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2} + 2 K_{\delta_3 \alpha_1 \alpha_2 \delta_1 \delta_2 \beta_1} R_{\delta_3 \delta_1 \delta_2 \gamma_1 \gamma_2 \delta_3} V_{\delta_1 \delta_2 \gamma_3 \beta_2} + K^{pph} R \quad (7) \\ & = 2 \Gamma_{\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2} + 2 V_{\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2} + K_{\delta_3 \alpha_1 \alpha_2 \delta_1 \delta_2 \beta_1}^{pph} R_{\delta_3 \delta_1 \delta_2 \gamma_1 \gamma_2 \delta_3} V_{\delta_1 \delta_2 \gamma_3 \beta_2} = \\ & = 2 \Gamma_{\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2} + W_{\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2} \quad (\text{A.3.8}) \end{aligned}$$

Die Größe W ist irreduzibel in beiden Teilchen-Loch-Kanälen und im Teilchen-Teilchen-Kanal (ES69, S273u.). Insgesamt folgt

$$2 \Gamma_{\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2} - K_{\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2}^{ph} - K_{\alpha_2 \alpha_1 \beta_1 \beta_2}^{ph} + 2 K_{\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2}^{pp} - W_{\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2} \quad (\text{A.3.9})$$

Auf folgende Weise kann man weitere Gleichungen für K^{ph} und K^{pp} bekommen: Geht man beispielsweise von Gleichung (4) aus, setzt hier den expliziten Ausdruck (A.2.13) für $K^{(p_1 h_3)}$ ein und berücksichtigt die Identitäten (A.1.7,8) sowie die

dazu adjungierten Ausdrücke, so erhält man:

$$\begin{aligned}
 K_{\alpha, \beta_1, \beta_2}^{ph} = & W_{\alpha, \alpha_1, \beta_1, \beta_2} + i K_{\alpha, \alpha_2, \gamma, \gamma_2}^{pp} g_{\gamma, \delta_2, \delta_1, \delta_2} K_{\delta_1, \delta_2, \beta_1, \beta_2}^{pp} - \\
 & - i K_{\alpha, \gamma, \beta_1, \beta_2}^{ph} L_{\gamma_2, \delta_1, \gamma, \delta_2} K_{\delta_2, \alpha_2, \delta_1, \beta_1}^{ph} .
 \end{aligned}
 \tag{A.3.10}$$

W ist durch Gleichung (8) definiert und reduziert sich bei Vernachlässigung der Drei-Quasiteilchen-Wechselwirkung K^{pph} auf 2V. (Vgl. Et69, Formel (26): W ist genau diejenige Wechselwirkung, die Ethofer V nennt, aber nicht explizit definiert.)

A.4 Inelastische Streuung am Grundzustand eines Kernes im Formalismus der Green'schen Funktionen (Em71, Wg74)

Sei $U_d(t, t')$ der Operator der zeitlichen Entwicklung des Systems Target + Projektil im Dirac-Bild. $|0\rangle$ sei der Grundzustand des Targets. Der asymptotische Anfangszustand sei $|\phi_i\rangle := |i, 0\rangle := a_{k_i}^+ |0\rangle$. Dann gilt (RT67, S.222):

$$\begin{aligned}
 |\psi_i^{(+)}\rangle &= U_d(0, -\infty) |\phi_i\rangle = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{iHt} \underbrace{e^{-iH_0 t}}_{e^{-i(E_0 + \epsilon_{k_i})t}} |\phi_i\rangle \\
 &= \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-i(E_0 + \epsilon_{k_i})t} e^{iHt} a_{k_i}^+ e^{-iHt} |0\rangle = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-i\epsilon_{k_i}t} \underbrace{e^{iHt}}_{e^{iE_0 t}} a_{k_i}^+ |0\rangle .
 \end{aligned}
 \tag{A.4.1}$$

Auf analoge Weise bekommt man $\langle \phi_f | = \langle n | a_{k_f}$ sowie

$$\langle \psi_f^{(-)} | = \lim_{t' \rightarrow +\infty} \langle n | a_{k_f} e^{i\epsilon_{k_f} t'} , \tag{A.4.1'}$$

so daß insgesamt für das S-Matrixelement $S_{fi}^{no} = \langle \psi_f^{(-)} | \psi_i^{(+)} \rangle$ das Ergebnis

$$S_{fi}^{h_0} = \lim_{\substack{t \rightarrow -\infty \\ t' \rightarrow \infty}} e^{ie_{kf}t' - ie_{ki}t} \langle n | a_{kf}(t') a_{ki}^+(t) | 0 \rangle \quad (\text{A.4.2})$$

folgt. Um die Zeitlimites durchzuführen, bedient man sich des Abelschen Grenzwertes:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \int_0^{\infty} dt' e^{-\varepsilon t'} f(t').$$

Mit dieser Vorschrift gilt dann

$$S_{fi}^{h_0} = \lim_{\varepsilon, \eta \rightarrow 0^+} \varepsilon \eta \int_{-\infty}^0 dt' \int_0^{\infty} dt e^{i(e_{kf} + i\varepsilon)t - i(e_{ki} + i\eta)t} \langle n | T(a_{kf}(t) a_{ki}^+(t')) | 0 \rangle. \quad (\text{A.4.3})$$

Die hier auftretende nichtdiagonale Green-Funktion

$$g_{kfki}^{h_0} := -i \langle n | T(a_{kf}(t_f) a_{ki}^+(t_i)) | 0 \rangle \quad (\text{A.4.4})$$

kann man aus einer normalen Zweiteilchen-Greenfunktion herausprojizieren. Zunächst gilt für die Fouriertransformierte

$$g_{12}^{\nu\mu}(e_1, e_2) := \int e^{ie_1 t_1 - ie_2 t_2} g_{12}^{\nu\mu}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \quad (\text{A.4.5})$$

$$:= 2\pi \delta(\varepsilon_{12} - E_{\nu\mu}) g_{12}^{\nu\mu}(\omega_{12})$$

mit

$$g_{12}^{\nu\mu}(\omega_{12}) = \langle \nu | \left(a_1 \frac{1}{\omega_{12} - (H - \Omega_{\nu\mu}) + i0} a_2^+ + a_2^+ \frac{1}{\omega_{12} + (H - \Omega_{\nu\mu}) - i0} a_1 \right) | \mu \rangle \quad (\text{A.4.6})$$

$$\omega_{12} := \frac{1}{2}(e_1 + e_2) \quad \Omega_{\nu\mu} := \frac{1}{2}(E_\nu + E_\mu)$$

$$E_{12} := e_1 - e_2 \quad E_{\nu\mu} := E_\nu - E_\mu$$

Die normale Vierpunktfunktion $g^{(2)}$ (s. (A.1.1)) hat folgen-

de Fourierzerlegung (Em71, No64, Ko62, Mi65):

$$g_{12,1'2'}(e_1, e_2, e_1', e_2') = -2\pi i \delta(e_1 + e_2 - e_1' - e_2') .$$

$$\cdot \left\{ \left[\sum_{|S_N\rangle} \frac{\tilde{\chi}_{11'}^S(e_1, e_1') \chi_{22'}^S(e_2, e_2')}{e_1 - e_1' - (E_{S_N} - E_{0_N}) - i0} - \frac{\tilde{\chi}_{22'}^S(e_2, e_2') \chi_{11'}^S(e_1, e_1')}{e_1 - e_1' + E_{S_N} - E_{0_N} - i0} \right] - [1' \leftrightarrow 2'] + \right. \\ \left. + \sum_{|q_{N+2}\rangle} \frac{\tilde{\varphi}_{12}^q(e_1, e_2) \varphi_{2'1'}^q(e_2', e_1')}{e_1 + e_2 - (E_{q_{N+2}} - E_{0_N}) + i0} - \sum_{|p_{N-2}\rangle} \frac{\tilde{\varphi}_{2'1'}^p(e_2', e_1') \varphi_{12}^p(e_1, e_2)}{e_1 + e_2 - (E_{p_{N-2}} - E_{0_N}) - i0} \right\} . \quad (A.4.7)$$

Die darin auftretenden χ^S bzw. $\tilde{\chi}^S$ lauten:

$$\chi_{11'}^S(p, p') = \sum_{|n_{N+1}\rangle} \frac{\langle S|a, 1n\rangle \langle n|a_1^+, 10\rangle}{e_1 - (E_{n_{N+1}} - E_{0_N}) + i0} + \sum_{|n'_{N-1}\rangle} \frac{\langle S|a_1^+, 1n'\rangle \langle n'|a, 10\rangle}{e_1 + (E_{n'_{N-1}} - E_{0_N}) - i0} , \quad (A.4.8)$$

$$\tilde{\chi}_{11'}^S(e_1, e_1') = \sum_{|n_{N+1}\rangle} \frac{\langle 0|a, 1n\rangle \langle n|a_1^+, 1S\rangle}{e_1 - (E_{n_{N+1}} - E_{0_N}) + i0} + \sum_{|n'_{N-1}\rangle} \frac{\langle 0|a_1^+, 1n'\rangle \langle n'|a, 1S\rangle}{e_1' + (E_{n'_{N-1}} - E_{0_N}) - i0} . \quad (A.4.8')$$

Hierbei wurde die Schreibweise Emrich's (Em71) übernommen.
Es sei

$$g_{12,1'2'}(e_1, e_2, e_1', e_2') := 2\pi \delta(e_1 + e_2 - e_1' - e_2') \bar{g}_{12,1'2'}(e_1, e_2, e_1', e_2') . \quad (A.4.9)$$

Wegen der Deltafunktion hängt $g^{(2)}$ nur von drei Energievariablen ab. Dasselbe gilt natürlich für die lineare Antwortfunktion L:

$$L_{12,1'2'} := g_{12,1'2'} - g_{11'} g_{22'} , \quad (A.4.10)$$

welche die Bethe-Salpeter-Gleichung (A.1.6) erfüllt. Diese lautet nach Fouriertransformation in den Teilchen-Loch-Energievariablen (vgl. (6'))

$$\varepsilon = \omega_{11'} , \quad \varepsilon' = \omega_{22'} , \quad E = \varepsilon_{11'} \quad (A.4.11)$$

$$L_{12,1'2'}(e_1, e_2) := 2\pi \delta(e_1 + e_2 - e_{1'} - e_{2'}) R_{12,1'2'}(\varepsilon + \frac{E}{2}, \varepsilon' - \frac{E}{2}; \varepsilon - \frac{E}{2}, \varepsilon' + \frac{E}{2}) , \quad (\text{A.4.12})$$

$$R_{12,1'2'}(\varepsilon + \frac{E}{2}, \dots, \varepsilon' + \frac{E}{2}) = -2\pi \delta(\varepsilon - \varepsilon') g_{12'}(\varepsilon + \frac{E}{2}) g_{21'}(\varepsilon' - \frac{E}{2}) - \\ - \frac{i}{2\pi} g_{1'1}(\varepsilon + \frac{E}{2}) g_{2'2'}(\varepsilon - \frac{E}{2}) \int d\varepsilon'' K_{\beta_1 \alpha_2 \alpha_1 \beta_2}^{ph}(\varepsilon + \frac{E}{2}, \varepsilon'' - \frac{E}{2}, \varepsilon - \frac{E}{2}, \varepsilon'' + \frac{E}{2}) \cdot R_{1'2',2'2'}(\varepsilon'' + \frac{E}{2}, \varepsilon'' - \frac{E}{2}) \sqrt{\varepsilon'' - \frac{E}{2}, \varepsilon'' + \frac{E}{2}} .$$

Multipliziert man (13) mit $(E - \varepsilon'_S)$,

$$\varepsilon'_{S_N} = E_{S_N} - E_{\phi_N} \quad (\text{Anregungsenergie des Zustands } |S_N\rangle) \quad (\text{A.4.14})$$

und bildet den Grenzwert $E \rightarrow \varepsilon'_S$, so kann man die Spektralzerlegung (7) von $g^{(2)}$ für R einsetzen (der Term gg, um den R sich von $\bar{g}^{(2)}$ unterscheidet, hat keine Singularitäten bei $E = \varepsilon'_S$, $|S\rangle \neq |0\rangle$) und erhält durch Vergleich von linker und rechter Seite eine Gleichung für $\chi_{22'}^S(\varepsilon - \frac{\varepsilon'_S}{2}, \varepsilon + \frac{\varepsilon'_S}{2})$. Dies ist wegen (6) gleich $g_{22'}^{S0}(\varepsilon)$:

$$g_{22'}^{S0}(\varepsilon) = -\frac{i}{2\pi} \int d\varepsilon' g_{\alpha_1 \beta_1}^{S0}(\varepsilon') K_{\beta_1 \alpha_2 \alpha_1 \beta_2}^{ph}(\varepsilon' + \frac{\varepsilon'_S}{2}, \varepsilon - \frac{\varepsilon'_S}{2}; \\ \varepsilon' - \frac{\varepsilon'_S}{2}, \varepsilon + \frac{\varepsilon'_S}{2}) \cdot g_{1'1'2'}(\varepsilon + \frac{\varepsilon'_S}{2}) \cdot g_{2'2'}(\varepsilon - \frac{\varepsilon'_S}{2}) . \quad (\text{A.4.15})$$

Nun hätte man statt von (A.1.6) ebensogut von (A.1.4) ausgehen können. Die Pole von R sind ebenso Pole von Γ , dem reduzierbaren Vertex, und aus der Symmetrie von Γ ($\Gamma_{12,1'2'} = -\Gamma_{21,1'2'} = -\Gamma_{12,2'1'} = \Gamma_{21,2'1'}$) folgt, daß in der Umgebung eines Poles $E = \varepsilon'_S$ gelten muß:

$$\lim_{E \rightarrow \varepsilon'_S} \Gamma_{\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2}(\varepsilon + \frac{E}{2}, \varepsilon' - \frac{E}{2}; \varepsilon - \frac{E}{2}, \varepsilon' + \frac{E}{2}) = \\ = \lim_{E \rightarrow \varepsilon'_S} \frac{\tilde{\chi}_{\alpha_1 \beta_1}^S(\varepsilon + \frac{\varepsilon'_S}{2}, \varepsilon - \frac{\varepsilon'_S}{2}) \chi_{\alpha_2 \beta_2}^S(\varepsilon' - \frac{\varepsilon'_S}{2}, \varepsilon' + \frac{\varepsilon'_S}{2})}{E - \varepsilon'_S + i0} \quad (\text{A.4.16})$$

Aus der Fouriertransformierten Gleichung (A.1.4) bekommt man dann mit Hilfe desselben Grenzprozesses, der zu (15) führte:

$$g_{22}^{SO}(\varepsilon) = g_{2\alpha_2}(\varepsilon - \varepsilon'_2) \chi_{\alpha_2\beta_2}^S(\varepsilon - \varepsilon'_2, \varepsilon + \varepsilon'_2) g_{\beta_2 2}(\varepsilon + \varepsilon'_2). \quad (\text{A.4.17})$$

Setzt man dies in (15) ein, so folgt

$$\begin{aligned} \chi_{\alpha_2\beta_2}^S(\varepsilon - \varepsilon'_2, \varepsilon + \varepsilon'_2) &= -\frac{i}{2\pi} \int d\varepsilon' g_{\alpha_1\beta_1}^{SO}(\varepsilon') \cdot \\ &\cdot K_{\beta_1\alpha_2\alpha_1\beta_2}^{ph}(\varepsilon' + \varepsilon'_2, \varepsilon - \varepsilon'_2; \varepsilon' - \varepsilon'_2, \varepsilon + \varepsilon'_2). \end{aligned} \quad (\text{A.4.18})$$

Definiert man $\delta(\varepsilon'_3 + \varepsilon - \varepsilon_2) \chi_{12}^S(e_-, e_+) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int dt_1 dt_2 e^{ie_1 t_1 - ie_2 t_2} \chi_{12}^S(t_1, t_2),$

(A.4.19)

so folgt durch Fouriertransformation von (17)

$$\begin{aligned} g_{12}^{SO}(t_1, t_2) &= \langle S | T(Q_1(t_1) Q_2^+(t_2)) | 0 \rangle = \\ &= \frac{i}{2\pi} \int dt_3 dt_4 g_{13}(t_1, t_3) \chi_{34}^S(t_3, t_4) g_{42}(t_4, t_2). \end{aligned} \quad (\text{A.4.20})$$

Das hat man nun zur Berechnung des S-Matrixelementes in (3) einzusetzen. Führt man den angegebenen Grenzprozeß explizit durch, so folgt:

$$S_{fi}^{SO} = -2\pi i \delta(e_{k_f} - e_{k_i} + \varepsilon'_S) \langle k_f^{(-)} | \chi^S(e_{k_i} - \varepsilon'_S, e_{k_i}) | k_i^{(+)} \rangle, \quad (\text{A.4.21})$$

wobei die $|k_f^{(-)}\rangle, |k_i^{(+)}\rangle$ die optischen Modellzustände sind:

$$|k_i^{(+)}\rangle = \left(1 + \frac{1}{e_{k_i} - K_{ii}} T(e_{k_i}) \right) |k_i\rangle. \quad (\text{A.4.22})$$

(vgl. (2.3.10,10')). Aus (21) folgt mit $S_{fi}^{SO} = -2\pi i \delta(e_{k_f} - e_{k_i} + \epsilon'_S) T_{fi}^{SO}$

$$\begin{aligned} T_{fi}^{SO} &= \chi_{k_f^{(-)}, k_i^{(+)}}^S (e_{k_i} - \epsilon'_S, e_{k_i}) \quad (18) \\ &= -\frac{i}{2\pi} \int d\epsilon' g_{\alpha\beta}^{SO}(\epsilon') K_{\beta, k_f^{(-)}, \alpha, k_i^{(+)}}^{ph}(\epsilon' + \frac{\epsilon'_S}{2}, e_{\epsilon'_S}, \epsilon'_S; \epsilon' - \frac{\epsilon'_S}{2}, e_{k_i}). \end{aligned} \quad (A.4.23)$$

Man kann nun K^{ph} in einen energieunabhängigen, statischen Anteil und einen energieabhängigen zerlegen: $K^{ph} = K_{st}^{ph} + K_{disp}^{ph}$. Vernachlässigt man K_{disp}^{ph} , so erhält man die DWBA-T-Matrix (Wg74):

$$T_{fi}^{SO(DWBA)} = \langle S | a_{\beta}^+ a_{\alpha} | 0 \rangle K_{st, \beta, k_f^{(-)}, \alpha, k_i^{(+)}}^{ph} \quad (A.4.24)$$

Dies vergleiche man beispielsweise mit dem Ergebnis, das wir mit Hilfe der Stoßnäherung für den Einfachstreuern der „multiple scattering theory“ erhalten (A.8.8):

$$T_{fi}^{SO(1)IA} = \langle S | a_q^+ a_q | 0 \rangle \langle q' k_f | t^f | q k_i \rangle \quad (A.4.25)$$

(t^f ist die freie Nukleon-Nukleon-Streuamplitude)

A.5 Zur Wechselwirkung K^{phd}

K^{phd} ist durch die Formeln (A.3.3, 3', 5, 5') gegeben, in denen R^d statt R zu setzen ist. Ganz analog definiert man K^{ppd} aus den Gleichungen (A.3.1, 1') sowie Γ^d aus (A.3.7, 7'). Zum Beispiel ist (schematisch)

$$K^{phd} = 2(V^{(2)} + K^{(ph_3)} \bar{R}^d V^{(2)}), \quad (A.5.1)$$

wobei $2\bar{R}^d V^{(2)} = R^d V^{(2)}$ gilt. Setzt man hier die Integralgleichung für R^d ein:

$$\bar{R}^d = -g_2^d L_{13}^d (1 + K^{(13)} \bar{R}^d),$$

so folgt:

$$\begin{aligned} K^{phd} &= 2(V + K^{(13)}(-g_2^\alpha L_{13}^\alpha)(V + K^{(13)}\bar{R}^\alpha V)) \quad (1) \\ &= 2V - K^{(13)} g_2^\alpha L_{13}^\alpha K^{phd}. \end{aligned} \quad (A.5.2)$$

Auf die gleiche Weise zeigt man

$$K^{ppd} = V + K^{(pp)}\bar{R}^\alpha V = V + \frac{1}{2} K^{(fp)} g_{12}^\alpha g_3^\alpha K^{ppd}, \quad (A.5.3)$$

$$\text{sowie } \Gamma^d = 2V + 2K\bar{R}^\alpha V = 2V + K g_1^\alpha g_2^\alpha g_3^\alpha \Gamma^d. \quad (A.5.4)$$

(Aus (1), (2), (4) folgt wie in Anhang 3, Formel (A.3.9):

$$2\Gamma_{\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2}^d = K_{\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2}^{phd} - K_{\alpha_2\alpha_1\beta_1\beta_2}^{phd} + 2K_{\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2}^{ppd} - W_{\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2}^d.$$

Subtrahiert man (1) von der ersten Identität (4), so bekommt man

$$\begin{aligned} \Gamma^d - K^{phd} &= -2i g_2^{-1} K_{13}^{ph} \bar{R}^\alpha V \\ &\quad - 2i g_2^{-1} K_{13}^{ph} (g_1^\alpha L_{13}^\alpha)(V + K^{(13)}\bar{R}^\alpha V) = \\ &= 2i P_{2d} K_{13}^{ph} L_{13}^\alpha K^{phd}, \end{aligned}$$

mit Indices:

$$[\Gamma^d - K^{phd}]_{\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2} = 2i P_{2d} K_{\alpha_2d}^{ph} L_{\alpha_3\alpha_1\beta_1\beta_2}^\alpha L_{\beta_3\beta_2\beta_1\beta_2}^\alpha K_{\beta_3\beta_2\beta_1\beta_2}^{phd}. \quad (A.5.5)$$

$$\text{Andererseits gilt } -L^\alpha K^{phd} = \hat{g}^\alpha (K^{phd} + i K^{ph} L^\alpha K^{phd}). \quad (A.5.6)$$

Mit (5) folgt daraus:

$$-L_{\alpha_1 \beta_1}^d K_{\beta_2 \alpha_1 \beta_2}^{phd} = g_{1\alpha_1}^d g_{\beta_1}^d (\Gamma_{\alpha_2 \beta_1 \beta_2}^d + i P_{\alpha_2 c} K_{\delta_3 \alpha_1 \delta_1 \beta_2}^{ph} L_{\epsilon_3 \delta_1 \epsilon_1 \delta_3}^d K_{\epsilon_2 \alpha_2 \epsilon_3 \beta_2}^{phd}). \quad (A.5.7)$$

Mit K^{PP} geht man genauso vor und bekommt:

$$[\Gamma_{\alpha_2 \beta_1 \beta_2}^d - 2 K_{\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2}^{PPd}] = i P_{\beta_2 d} K_{\alpha_1 \alpha_2 \delta_1 \delta_2}^{PP} g_{\delta_1 \delta_2 \epsilon_1 \epsilon_2}^d K_{\epsilon_1 \epsilon_2 \beta_1 \beta_2}^{PP}, \quad (A.5.8)$$

sowie

$$g_{1\alpha_1}^d K_{\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2}^{PPd} = g_{1\alpha_1}^d g_{2\alpha_2}^d \cdot [\Gamma_{\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2}^d + i P_{\beta_1 c} K_{\alpha_1 \alpha_2 \delta_1 \delta_2}^{PP} g_{\delta_1 \delta_2 \epsilon_1 \epsilon_2}^d K_{\epsilon_1 \epsilon_2 \beta_1 \beta_2}^{PPd}]. \quad (A.5.9)$$

(5), (7), (8), (9) braucht man bei der nun folgenden Rechnung:

$$K_{1234}^{phd} \stackrel{(A.3,5)}{=} 2 V_{1234} - K_{512673}^{PPh} R_{8679a5}^d V_{9a48} - (i g_{53}^{-1} K_{1267}^{PP} - i g_{16}^{-1} K_{5273}^{Ph}) R_{8679a5}^d \cdot V_{9a48}. \quad (A.5.10)$$

Für das Produkt $R^{(3)} V^{(2)}$ am Ende von (10) setze man $g_{79}^d L_{86a5}^d K_{a984}^{phd}$. Die beiden ersten Summanden ergeben w_{1234}^d . Es folgt

$$K_{1234}^{phd} = w_{1234}^d - (i g_{53}^{-1} \dots) g_{79}^d L_{86a5}^d K_{a984}^{phd}. \quad (A.5.11)$$

Für $L^d K^{phd}$ wird nun Formel (7) eingesetzt. Faktoren wie $g_{79}^d P_{9c}$ ergeben keinen Beitrag. Das Ergebnis ist

$$K_{1234}^{phd} = w_{1234}^d + i P_{3d} K_{1267}^{PP} g_{79}^d g_{68}^d \Gamma_{8924}^d + i P_{1d} K_{5273}^{Ph} g_{79}^d g_{a5}^d \Gamma_{19a4}^d. \quad (A.5.12)$$

Für $g^{\alpha} g^{\alpha} \Gamma^{\alpha}$ setze man die Formeln (7) bzw. (9) ein. Wegen der Projektoren P heben sich wieder zwei Terme weg, und es bleibt

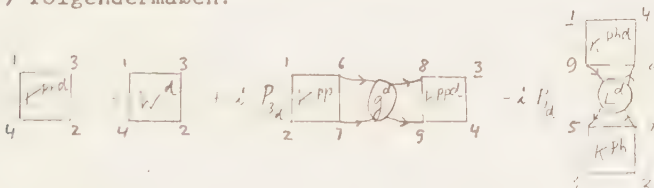
$$K_{1234}^{phd} = W_{1234}^{\alpha} + i P_{3d} K_{1267}^{pp} g_{7698}^{\alpha} K_{8934}^{ppd} - i P_{1d} K_{1a49}^{phd} L_{97a5}^{\alpha} K_{5213}^{ph} . \quad (A.5.13)$$

Es folgt, daß Matricelemente von K_{1234}^{phd} mit kontinuierlichen Indices 1 und 3 durch W_{1234}^{α} gegeben sind:

$$P_{1c} P_{3c} K_{1234}^{phd} = P_{1c} P_{3c} W_{1234}^{\alpha} . \quad (A.5.14)$$

(3.3.10)
Dies sind aber gerade die Matricelemente, die in (2.2.4) für kontinuierliche Indices β_1 und β_1' auftreten.

(13) ist die Spezialisierung der Gleichung (A.3.10) für das vollständige K^{ph} auf die Größe K^{phd} . Graphisch lautet (13) folgendermaßen:



$1, 3$ weisen auf diskrete Einteilchenzustände 1 und 3 hin.

A.6 Exakter Beweis von Gleichung (3.3.1); Terme mit zwei g^C -Linien

Um das Ergebnis (3.3.1) herzuleiten, wurde in symmetrischer Weise von den Gleichungen (3.1.11, 11') ausgegangen. Mit (3.1.11) wurden alle Graphen mit „Teilchen 1 im Kontinuum“ summiert, analog mit (3.1.11') alle diejenigen mit „Teilchen 2“. Um diese Verfahrensweise näher zu begründen, soll das Ergebnis auf eine alternative Weise abgeleitet werden. Man geht von der Gleichung (3.1.10) aus, schematisch:

$$\bar{R}_{123} = g_1 g_2 g_3 + g_1 g_2 g_3 K \bar{R}_{123} \quad . \quad (A.6.1)$$

Sämtliche Beiträge mit einer Kontinuumslinie zu $\bar{R}$ seien $\bar{R}^c$. Dann ist

$$\begin{aligned} \bar{R}^c = & g_1^c g_2^d g_3^d + g_1^c g_2^d g_3^d K \bar{R}^d + g_1^d g_2^c g_3^d + \\ & + g_1^d g_2^c g_3^d K \bar{R}^d + g_1^d g_2^d g_3^d K \bar{R}^c + \text{Rest} \quad , \end{aligned} \quad (A.6.2)$$

Die Restterme sind

$$g_1^c g_2^d g_3^d (-i) g_1^{-1} K_{23}^{ph} \bar{R}^{c_1} + g_1^d g_2^c g_3^d (-i) g_2^{-1} K_{13}^{ph} \bar{R}^{c_2} \quad .$$

(Es ist $g_i^c g_i^{-1} = P_{i_c}$, der Projektor auf einen kontinuierlichen Einteilchenzustand 1, analog P_{2_c} .) Die Größe $\bar{R}^{c_1}$, welche sämtliche Beiträge zu R^c mit einem kontinuierlichen Index 1 auf der linken Seite beinhaltet, ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \bar{R}^{c_1} = & g_1^c g_2^d g_3^d + g_1^c g_2^d g_3^d K \bar{R}^d \\ & - i P_{1_c} g_1^d g_2^d g_3^d K_{23}^{ph} \bar{R}^{c_1} \quad . \end{aligned} \quad (A.6.3)$$

Aus (3) folgt

$$P_{1_c} (1 + i g_1^d g_2^d g_3^d K_{23}^{ph}) \bar{R}^{c_1} = g_1^c g_2^d g_3^d (1 + K^{(23)} \bar{R}^d) \quad . \quad (A.6.4)$$

(K kann durch $K^{(23)}$ ersetzt werden, da

$$-i g_1^c g_2^{-1} g_3^d g_3^d K_{23}^{ph} \bar{R}^d = 0 \quad (A.6.5)$$

gilt.) Aus (4) folgt

$$\begin{aligned} P_{1_c} \bar{R}^{c_1} - \bar{R}^{c_1} &= (1 + i L_{23}^d K_{23}^{ph}) g_1^c g_2^d g_3^d (1 + K^{(23)} \bar{R}^d) \\ &= - g_1^c L_{23}^d (1 + K^{(23)} \bar{R}^d) \quad . \end{aligned} \quad (A.6.6)$$

Nun ist (2) wegen (3) gleichbedeutend mit:

$$\begin{aligned} (1 - g_1^d g_2^d g_3^d K) \bar{R}^c &= \bar{R}^{c_1} + \bar{R}^{c_2} \Rightarrow \bar{R}^c = (1 + \bar{R}^d K) (\bar{R}^{c_1} + \bar{R}^{c_2}) = \\ &= \bar{R}^c = (1 + \bar{R}^d K^{(23)}) (-g_1^c L_{23}^d) (1 + K^{(23)} \bar{R}^d) + \\ &\quad + (1 + \bar{R}^d K^{(13)}) (-g_2^c L_{13}^d) (1 + K^{(13)} \bar{R}^d). \end{aligned} \quad (A.6.7)$$

(Die Ersetzung von K auf der linken Seite durch $K^{(23)}$ bzw. $K^{(13)}$ folgt wie (5)!) Man erhält also genau Gleichung (3.3.1).

Um die Terme nächsthöherer Ordnung in g^C zu bekommen, soll in der gleichen Weise verfahren werden. Sämtliche Beiträge mit zwei g^C -Linien zu $\bar{R}$ seien $\bar{R}^{CC}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \bar{R}^{CC} &= g_1^c g_2^c g_3^d + g_1^c g_2^c g_3^d K \bar{R}^d - i g_1^d g_2^c g_3^d K_{23}^{ph} \bar{R}^{c_1} - \\ &\quad - i g_1^c g_2^d g_3^d K_{13}^{ph} \bar{R}^{c_2} + g_1^c g_2^d g_3^d K^{(23)} \bar{R}^c - i g_2^d g_3^d K_{23}^{ph} \bar{R}^{c,c} + (A.6.8) \\ &\quad + g_1^d g_2^c g_3^d K^{(13)} \bar{R}^c - i g_1^d g_3^d K_{13}^{ph} \bar{R}^{c_2} + g_1^d g_2^d g_3^d K \bar{R}^{CC}, \end{aligned}$$

wobei $\bar{R}^{c_1}$, $\bar{R}^{c_2}$ durch (6), $\bar{R}^C$ durch (7) gegeben sind.

$\bar{R}^{c,c}$ sind alle Beiträge zu $\bar{R}$ mit einer g_1^C -Linie links und irgendeiner anderen g^C -Linie:

$$\begin{aligned} \bar{R}^{c,c} &= g_1^c g_2^c g_3^d + g_1^c g_2^c g_3^d K \bar{R}^d - i g_2^c g_3^d K_{23}^{ph} \bar{R}^{c_1} - \\ &\quad - i g_1^c g_3^d K_{13}^{ph} \bar{R}^{c_2} + g_1^c g_2^d g_3^d K^{(23)} \bar{R}^c - \\ &\quad - i g_2^d g_3^d K_{23}^{ph} \bar{R}^{c,c}. \end{aligned} \quad (A.6.9)$$

Für $\bar{R}^{c_2 c}$ gilt eine analoge Gleichung (9'), bei der 1 und 2 vertauscht sind. Vergleich von (8) und (9), (9') ergibt:

$$\begin{aligned} \bar{R}^{CC} &= \bar{R}^{c,c} + \bar{R}^{c_2 c} - g_1^c g_2^c g_3^d (1 + K \bar{R}^d) + i g_2^c g_3^d K_{23}^{ph} \bar{R}^{c_1} + \\ &\quad + i g_1^c g_3^d K_{13}^{ph} \bar{R}^{c_2} + g_1^d g_2^d g_3^d K \bar{R}^{CC}. \end{aligned} \quad (A.6.10)$$

Zunächst berechnet man $\bar{R}^{c_1 c}$ bzw. $\bar{R}^{c_2 c}$ aus (9), (9'):

$$\bar{R}^{c_1 c} = (1 + i L_{23}^{\alpha} K_{23}^{ph}) [g_1^c g_2^c g_3^{\alpha} (1 + K \bar{R}^{\alpha}) - \dots] .$$

Aus (10) folgt dann $\bar{R}^{cc} = (1 + \bar{R}^{\alpha} K) [\bar{R}^{c_1 c} + \bar{R}^{c_2 c} - \dots] .$

Faßt man die entstehenden Ausdrücke in geeigneter Weise zusammen, so folgt:

$$\begin{aligned} \bar{R}^{cc} = & (1 + \bar{R}^{\alpha} K^{(123)}) (-g_1^c g_2^c g_3^{\alpha}) (1 + K^{(123)} \bar{R}^{\alpha}) + [(1 + \bar{R}^{\alpha} K^{(23)}) \cdot \\ & \cdot (-g_1^c L_{23}^{c_1}) (1 + K^{(23)} \bar{R}^{\alpha})] + [1 \leftrightarrow 2] + \{ (1 + \bar{R}^{\alpha} K^{(23)}) \cdot \\ & \cdot (L_{23}^{\alpha} K_{23}^{ph} g_2^c g_1^c g_3^{\alpha} K_{13}^{ph} L_{13}^{\alpha}) (1 + K^{(13)} \bar{R}^{\alpha}) \} + \{ 1 \leftrightarrow 2 \} + \\ & + \left[(1 + \bar{R}^{\alpha} K^{(23)}) g_1^c L_{23}^{\alpha} K^{(23)} [(1 + \bar{R}^{\alpha} K^{(23)}) g_1^c L_{23}^{\alpha} \cdot \right. \\ & \cdot (1 + K^{(23)} \bar{R}^{\alpha}) + (1 + \bar{R}^{\alpha} K^{(13)}) g_2^c L_{13}^{\alpha} (1 + K^{(13)} \bar{R}^{\alpha})] \cdot \\ & \left. + [1 \leftrightarrow 2] \right] , \end{aligned} \quad (A.6.11)$$

$$\text{wobei} \quad L_{13}^{c_1} := (1 + i L_{13}^{\alpha} K_{13}^{ph}) (-g_1^c g_3^{\alpha}) (1 + i K_{13}^{ph} L_{13}^{\alpha}) \quad (A.6.12)$$

sämtliche Beiträge zu L_{13} mit einer einzigen g_1^c -Linie sind. $K^{(123)}$ ist definiert durch (vgl. (A.2.9)):

$$K^{(123)} := i g_3^{-1} K_{12}^{pp} + K_{123}^{pph} . \quad (A.6.13)$$

Bildet man den zu R^{cc} gehörenden Teil $\gamma^{(c_2)}$ des Massenoperators:

$$v^{(c_2)} := 2 V \bar{R}^{cc} V , \quad (A.6.14)$$

so ergeben die Terme von (11), die in 1 und 2 symmetrisch sind, wegen (A.2.13) den gleichen Beitrag. Es folgt

$$\begin{aligned} v^{cc_2} = & K^{ph\alpha} \left\{ -\frac{1}{2} g_1^c g_2^c g_3^{\alpha} - g_1^c L_{23}^{c_1} - g_1^c L_{23}^{\alpha} K^{(23)} \bar{R}_{123}^c - \right. \\ & \left. - L_{23}^{\alpha} K_{23}^{ph} g_2^c g_1^c g_3^{\alpha} K_{13}^{ph} L_{13}^{\alpha} \right\} K^{ph\alpha} , \end{aligned} \quad (A.6.15)$$

wobei $\bar{R}^C$ durch (7) und L^C durch (12) gegeben sind.

Falls man sich für den Term von $\bar{R}^{CC}$ gesondert interessiert, bei dem zwei g^C -Linien gleichzeitig vorkommen, $\hat{R}^{CC}$, so gehe man von Gleichung (3.1.3 a) bzw. (A.2.15,20) aus:

$$R_{312} = g_3 g_{12} + g_3 g_{12} \cdot \frac{1}{2} K_{123}^{(pp)} R_{312} \quad (A.6.16)$$

$$\text{Mit } g_{12}^{CC} = (1 + \frac{1}{2} i g_{12}^d K^{pp}) (g_1^C g_2^C - \widetilde{g_1^C g_2^C}) (1 + \frac{1}{2} i K_{12}^{pp} g_{12}^d) \quad (A.6.17)$$

(dies sind alle Beiträge zu g_{12} mit zwei gleichzeitigen g^C -Linien) folgt:

$$\hat{R}^{CC} = (1 + \frac{1}{2} R^d K^{(pp)}) g_3^d g_{12}^{CC} (1 + \frac{1}{2} K^{(pp)} R^d) \quad (A.6.18)$$

Der Beitrag aller Graphen mit zwei gleichzeitigen g^C -Linien zum Massenoperator ist dann

$$\hat{v}^{(c_2)} = \hat{R}^{CC} \cdot (1 + \frac{1}{2} R^d K^{(pp)}) g_3^d g_{12}^{CC} (1 + \frac{1}{2} K^{(pp)} R^d) \quad (A.6.19)$$

Definiert man K^{ppd} durch die Gleichungen (A.3.1,1') mit der Ersetzung $R \rightarrow R^d$, so folgt

$$\hat{v}^{(c_2)} = K^{ppd} g_3^d g_{12}^{CC} K^{ppd} \quad (A.6.20)$$

$$\text{mit Indices: } \hat{v}_{11'}^{(c_2)} = K_{1\alpha_3\alpha_1\alpha_2}^{ppd} g_{\beta_3\alpha_3}^d g_{\alpha_2\alpha_2\beta_1\beta_2}^{CC} K_{\beta_1\beta_2\beta_3}^{ppd} \quad (A.6.20')$$

A.7 Behandlung des Hard-Core (Renormierung der freien Wechselwirkung)

J. Winter (Wi72, Wi75) hat gezeigt, wie man prinzipiell die Schwierigkeit überwinden kann, die mit dem Hard-Core zusammenhängt: Da man sich bei praktischen Rechnungen auf Einteilchenzustände eines Modellraums beschränkt, muß der Einfluß der nicht im Modellraum liegenden Zustände (in unserem Falle Streuzustände $|k^{(a)}\rangle$ mit $k > k_0$, wenn der Modellraum die Kante k_0 hat) durch eine Renormierung der freien Wechselwirkung berücksichtigt werden: Dies erreicht man im Falle der Integralgleichung für die pph-Antwortfunktion $R^{(3)}$ auf folgende Weise: Der Modellraum für die pph-Zustände sei dadurch definiert, daß beide Teilchen Zustände unterhalb der Modellkante bevölkern. P projiziere auf den Modellraum, Q auf den Restraum: $P+Q=1$. Sei nun

$$\begin{aligned} (Q g g g P)_{3'12'1'2'3} &= (P g g g Q)_{3'12'1'2'3} = 0, \\ (Q g g g Q)_{3'12'1'2'3} &= g_{3'3} (Q g^{\circ 3 \circ} Q)_{12'1'2'}, \\ (Q K Q)_{3'12'1'2'3} &= (Q K P)_{3'12'1'2'3} = (P K Q)_{3'12'1'2'3} = i(g^{-1})_{33} V_{12'1'2'}. \end{aligned} \quad (\text{A.7.1})$$

Dies bedeutet, daß, falls mindestens ein Satz von Zweiteilchenzuständen außerhalb des Modellraums liegt, sowohl K^{pph} wie die Terme $-i g^{-1} K^{\text{ph}}$ des pph-Vertex $K^{(3)}$ vernachlässigt werden und K^{pp} durch die freie Wechselwirkung $V^{(2)}$ ersetzt wird. Bezeichnet man Zustände a über (unter) der Modellraumkante durch $\bar{a}$ ($\underline{a}$), so ist vorausgesetzt, daß $\partial_{\bar{a} \underline{b}} = \partial_{\underline{b} \bar{a}} = 0$ gilt. Dann zeigt man leicht (Wi72)

$$\begin{aligned} v_{11'} &= -2i T_{1\alpha'1'\beta}^{B_n} g_{\beta\alpha'} + T_{1\beta\gamma\delta}^{B_n} (P R P)_{\beta'\delta'\gamma'\delta'\beta'} T_{\gamma'\delta'1'\beta'}^{B_n} \\ \text{mit} \quad T_{12'1'2'}^{B_n} V_{12'1'2'} &+ \frac{1}{2} V_{12'\alpha\beta} g_{\alpha\beta\gamma\delta}^{B_n} V_{\gamma\delta'1'2'} = \\ &= V_{12'1'2'} + i V_{12'\alpha\beta} (Q g^{\circ} g^{\circ} Q)_{\alpha\beta\gamma\delta} T_{\gamma\delta'1'2'}^{B_n}. \end{aligned} \quad (\text{A.7.2})$$

$T^{\text{Br.}}$ ist der reduzierbare Vertex der Vierpunktfunktion in Brückner'scher Näherung, eine endliche Größe.

Für PRP erhält man unter den Voraussetzungen (1) die Gleichung

$$[PRP]_{3'12'12'3} = g_{3'3} [P(gg - \tilde{g}\tilde{g})P]_{12'12'} + \quad (\text{A.7.3})$$

$$+ g_{\alpha_3} [Pg g P]_{12\alpha_1\alpha_2} \frac{K}{\beta_{3'1}\alpha_2\beta_1\beta_2\alpha_3} [PRP]_{3'\beta_1\beta_212'\beta_3}$$

mit
$$\begin{aligned} K_{\beta_3\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2\alpha_3} &:= K_{\beta_1\alpha_1\alpha_2\beta_2\alpha_3}^{PPh} - i \left(g_{\alpha_1\beta_1}^{-1} K_{\beta_3\alpha_2\beta_2\alpha_3}^{Ph} + g_{\alpha_1\beta_2}^{-1} K_{\beta_3\alpha_1\beta_1\alpha_3}^{Ph} \right) + \\ &+ i g_{\beta_3\alpha_3}^{-1} \left(K_{\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2}^{PP} + \frac{1}{2} i V_{\alpha_1\alpha_2\gamma_1\gamma_2} g_{\gamma_1\delta_2\delta_1\gamma_2}^{Br} V_{\delta_1\delta_2\beta_1\beta_2} \right). \end{aligned}$$

D.h. $\underline{K}$ unterscheidet sich um den Term $\frac{1}{2} i V g^{Br} V i g'$ von K . Durch Vergleich mit der Beziehung

$$\frac{1}{2} \Gamma_{\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2} = K_{\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2}^{PP} + \frac{1}{2} i K_{\alpha_1\alpha_2\gamma_1\gamma_2}^{PP} g_{\gamma_1\gamma_2\delta_1\delta_2} K_{\delta_1\delta_2\beta_1\beta_2}^{PP}, \quad (\text{A.7.4})$$

welche aus (A.3.1', 7') folgt, erkennt man, daß die Teilchen-Teilchen-Wechselwirkung K^{PP} gerade um den Term erweitert werden muß, den die Zweiteilchenzustände außerhalb des Modellraums im Rahmen der Näherung (1) zum reduzierbaren Vertex $\frac{1}{2} \Gamma$ neben K^{PP} beitragen.

Analog zu $\underline{K}$ definiert man das entsprechende $\underline{K}^{(ph)}$. Will man sich also bei etwaigen numerischen Rechnungen auf einen Modellraum der beschriebenen Art beschränken, so sind in den Ausdrücken für die verschiedenen Anteile des Massenoperators folgende Ersetzungen durchzuführen:

$$\begin{aligned} V &\rightarrow T^{\text{Br.}}, & g^c | \alpha &\rightarrow P(g^c | \alpha) P, \\ K^{ph\alpha} &\rightarrow \underline{K}^{ph\alpha} := 2T^{\text{Br.}} + T^{\text{Br.}}(PRP)^\alpha \underline{K}^{(ph)}. \end{aligned} \quad (\text{A.7.5})$$

Die Summationen bzw. Integrationen sind hiermit auf den Modellraum beschränkt.

A.8 Die Stoßnäherung für den Einfachstreuern der Vielfachstreuungstheorie

In diesem Abschnitt wird der in Kapitel 4 verwandte Ausdruck für den inelastischen Wirkungsquerschnitt für Nukleonen hergeleitet. Dazu sei zunächst kurz die „multiple scattering theory“ dargestellt (s. z.B. RT67, S.350ff, GW67 oder andere Standardwerke der Streutheorie). Es handelt sich dabei um eine Theorie, bei der Projektil als von den Targetteilchen unterscheidbar angenommen wird. Dann läßt sich die Born'sche Reihe für die T-Matrix (P Projektil, T Target):

$$T_{PT} = V_{PT} + V_{PT} \frac{1}{E - H_0 + i0} T_{PT} = \sum_{v=0}^{\infty} \left(V_{PT} \frac{1}{E - H_0 + i0} \right)^v V_{PT} \quad (\text{A.8.1})$$

dergestalt umordnen, daß alle Terme, die die Streuung des Projektils an einem speziellen Targetteilchen beschreiben, zusammengefaßt werden. Sei also die Wechselwirkung zwischen dem Projektil P und dem Target T gleich

$$V_{PT} = \sum_{n=1}^A v_n, \quad (\text{A.8.2})$$

wobei v_n die Wechselwirkung zwischen P und dem Targetteilchen n bedeutet. Dann faßt man also alle Terme

$$\left\{ \left(v_n \frac{1}{E - H_0 + i0} \right)^j v_n ; j = 0, 1, 2, \dots \right\}$$

$$\text{zusammen zu} \quad t_n = v_n + v_n \frac{1}{E - H_0 + i0} t_n. \quad (\text{A.8.3})$$

Mit dieser Definition ist (1) äquivalent mit (RT67)

$$T_{PT} = \sum_{n=1}^A t_n + \sum_{\substack{n,m \\ n+m}} t_n \frac{1}{E-H_0+\epsilon_0} t_m + \sum_{\substack{n,m,\ell \\ n+m}} t_n \frac{1}{E-H_0+\epsilon_0} t_m \frac{1}{E-H_0+\epsilon_0} t_\ell + \dots \quad (\text{A.8.4})$$

In dieser Arbeit wird angenommen, daß der Einfachstreuterm

$$T_{PT}^{(1)} = \sum_{n=1}^A t_n \quad (\text{A.8.5})$$

bei hohen Energien des Projektils eine gute Näherung ist. Da t_n , die Streuamplitude im Medium, nicht exakt berechenbar ist, ersetzt man sie durch diejenige im freien Raum, $t_n^{(f)}$, in diesem Falle die Nukleon-Nukleon-Streuamplitude. Dies ist die sogenannte „Stoßnäherung“ („impulse approximation“), die wiederum bei hohen Energien gut sein sollte (s. Diskussion bei RT67). Im Folgenden wird also gesetzt:

$$T_{PT} \approx T_{PT}^{(1)IA} = \sum_{n=1}^A t_n^{(f)} \quad (\text{IA} = \text{„impulse approximation“}), \quad (\text{A.8.6})$$

Man erkennt, daß $T_{PT}^{(1)IA}$ wegen (6) ein Einteilchenoperator ist. Das Matrixelement

$$T_{fi}^{(1)IA} := \langle \phi_f | T_{PT}^{(1)IA} | \phi_i \rangle \quad (\text{A.8.7})$$

von T zwischen den asymptotischen Zuständen $|\phi_i\rangle$ (Projektil frei mit Impuls k_i , Target im Anfangszustand $|i\rangle$) und $|\phi_f\rangle$ (analog mit $i \leftrightarrow f$) kann mittels des Formalismus der zweiten Quantisierung nach etwas umständlicher Rechnung in der Form

$$T_{fi}^{(1)IA} = \int \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{d^3q'}{(2\pi)^3} \langle k_f q' | t^{(f)} | k_i q \rangle \langle f | a_q^\dagger a_q | i \rangle \quad (\text{A.8.8})$$

geschrieben werden (beachte die Ähnlichkeit mit (A.4.24)!!). Hierbei steht q für den vollständigen Satz von Quantenzahlen $q := (q, \epsilon_q, r_q) := (q, \eta_q)$. Die ebenen Wellen sind auf

$\langle q' | q \rangle = (2\pi)^3 \delta(q - q')$ normiert. Aus Invarianzgründen ist

$$\begin{aligned} \langle k_f q' | t^{(f)} | k_i q \rangle &= (2\pi)^3 \delta(k_f + q' - k_i - q) \cdot \\ &\cdot \langle k_f - \frac{k_i + q}{2} \eta_f \eta_f^{(f)} | \frac{k_i - q}{2} \eta_i \eta_i \rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.8.9})$$

Damit wird (8) zu

$$T_{fi}^{(IIA)} = \sum_{\eta_f \eta_i} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \langle k_f - \frac{k_i + q}{2} \eta_f \eta_f^{(f)} | \frac{k_i - q}{2} \eta_i \eta_i \rangle \langle f | a_{k_f - k_i + q, \eta_f}^+ a_{q, \eta_i} | i \rangle. \quad (\text{A.8.10})$$

Nimmt man nun an, daß das Projektil eine so hohe Energie hat, daß die Targetteilchen als ruhend betrachtet werden können, so kann man in (10) in der Streuamplitude $\langle \dots | t^{(f)} | \dots \rangle$ $q=0$ setzen und diese vor das Integral ziehen. (Beiträge von q -Werten, die viel größer als der „Fermiimpuls“ des Targets sind, sind vernachlässigbar, weil dann $q_f^{(f)}$ verschwindet.) Dann gilt also ungefähr

$$T_{fi}^{(IIA)} \cong \sum_{\eta_f \eta_i} \langle k_f - \frac{k_i}{2} \eta_f \eta_f^{(f)} | \frac{k_i}{2} \eta_i \eta_i \rangle \langle f | a_{k_f - k_i, \eta_f}^+ | i \rangle \quad (\text{A.8.11})$$

mit
$$S_{\eta_f \eta_i}(q) := \int \frac{d^3 q'}{(2\pi)^3} a_{q, \eta_i}^+ a_{q+q', \eta_f}. \quad (\text{A.8.11'})$$

In der Schreibweise von A.4 ist $T_{fi} = T_{fi}^{fi}$. Setzt man (11) in die Formel für den differentiellen Wirkungsquerschnitt für inelastische Streuung unpolarisierter Nukleonen am Grundzustand des Targets,

$$\frac{d \bar{\sigma}_{R k' k}}{d \Omega_{k'} d \epsilon_{k'}} = \left(\frac{2 m_{\pi} c}{4 \pi \hbar^2} \right)^2 \frac{k'}{k} \cdot \frac{1}{4} \sum_{\eta_k \eta_{k'}} \sum_{S_A} |T_{k' k}^{S_A}|^2 \delta(\epsilon_k - \epsilon_{k'} - \epsilon_S') \quad (\text{A.8.12})$$

($R := \text{„reaction“}$),

ein, so bekommt man nach längerer Rechnung

$$\frac{d\bar{\sigma}_{kf}^R}{d\Omega_{kf} d\epsilon_{kf}} = \left(\frac{m_{red}}{2\pi\hbar^2}\right)^2 \frac{\hbar_f}{\hbar_i} \sum_{\eta_f \eta_i} \sum_{\bar{\eta}' \eta'} \langle \frac{\hbar_f}{2} \eta_f \eta' | t^{(f)} | \frac{\hbar_i}{2} \eta_i \eta' \rangle \cdot \langle \frac{\hbar_i}{2} \eta_i \bar{\eta}' | t^{(i)} | \frac{\hbar_f}{2} \eta_f \eta' \rangle \cdot \frac{1}{2\pi} V R_i(q, \omega; \bar{\eta}' \eta' \eta \eta') \quad (\text{A.8.13})$$

mit $\frac{\hbar_f}{2} = \frac{\hbar_f}{2} - \frac{\hbar_i}{2}$, $\frac{\hbar_i}{2} = \frac{\hbar_i}{2}$, $q = \frac{\hbar_f}{2} - \frac{\hbar_i}{2} = \frac{\hbar_f}{2} - \frac{\hbar_i}{2}$, $\omega = \frac{\hbar_f^2}{2m} - \frac{\hbar_i^2}{2m} = e_{\hbar_f} - e_{\hbar_i}$ (A.8.13')

und

$$V R_i(q, \omega, \bar{\eta}' \eta' \eta \eta') := \int dt e^{i\omega t} \langle i | \delta_{\bar{\eta}' \eta'}^i(q, t) \delta_{\eta \eta'}^i(q, 0) | i \rangle := \int d^3R \bar{R}_i(R, q, \omega, \bar{\eta}' \eta' \eta \eta') = \int d^3R \left\{ \int d\frac{p}{2} dt e^{i\omega t - i q \cdot p} \langle i | \delta_{\bar{\eta}' \eta'}^i(R - \frac{p}{2}, 0) \delta_{\eta \eta'}^i(R + \frac{p}{2}, t) | i \rangle \right\}, \quad (\text{A.8.14})$$

sowie $\delta_{\bar{\eta}' \eta'}^i(q, t) = \delta_{\bar{\eta}' \eta'}^+(q, t) - \langle i | \delta_{\bar{\eta}' \eta'}^+(q, t) | i \rangle$. (A.8.15)

δ ist durch (11') definiert. Es ist

$$\delta_{\eta \eta'}^+(q) = \delta_{\eta \eta'}(-q). \quad (\text{A.8.16})$$

Der Dichteoperator $\delta_{\eta \eta'}(\tau)$ ist die Fouriertransformierte von $\delta_{\eta \eta'}(q)$:

$$\delta_{\eta \eta'}(\tau) = a_{\tau \eta'}^+ a_{\tau \eta}. \quad (\text{A.8.17})$$

Die zeitabhängigen Operatoren sind durch

$$A(t) = e^{iHt} A e^{-iHt} \quad (\text{A.8.18})$$

gegeben. $R_i(q, \omega, \bar{\eta}' \eta' \eta \eta')$ ist die Fouriertransformierte der sogenannten Autokorrelationsfunktion der Dichteschwankungen des Targetkerns (vgl. (13)). Sie soll ebenfalls „Autokorrelationsfunktion“ genannt werden. Mit $f = \frac{1}{2\pi} m_{red} A$ (Streuamplitude) erhält man durch Integration von (12) den totalen Reaktionswirkungsquerschnitt $\bar{\sigma}_R(\hbar_i)$:

$$-\frac{\hbar^2 k_i}{2m} \bar{\sigma}_R(k_i) = -\frac{\hbar^2 V}{4\pi m^2} \sum_{\substack{\eta\eta' \\ \bar{\eta}\bar{\eta}'}} \int d^3k' f_{\underline{k}\eta, \underline{k}'\eta'}^* f_{\underline{k}\eta, \underline{k}'\eta'} \cdot R_i(\underline{k}' - \underline{k}; \omega; \bar{\eta}'\bar{\eta}\eta\eta'). \quad (\text{A.8.20})$$

A.9 Die Autokorrelationsfunktion in Kernmaterie bei Vernachlässigung der Teilchen-Loch-Wechselwirkung

In Kernmaterie wird die Autokorrelationsfunktion $R_i(R, q, \omega)$ (A.8.14) wegen der Translationsinvarianz unabhängig von R , und mit (A.8.14) gilt (KM := „Kernmaterie“)

$$\begin{aligned} \bar{R}_0^{KM}(R, q, \omega; \bar{\eta}\eta'\eta\eta') &= R_0^{KM}(q, \omega, \bar{\eta}'\bar{\eta}\eta\eta') = \\ &= \int d^3p dt e^{i\omega t - i q \cdot p} \left\{ \langle 0 | f_{\bar{\eta}'\bar{\eta}}(0,0) f_{\eta\eta'}(p,t) | 0 \rangle - \right. \\ &\quad \left. - \langle 0 | f_{\bar{\eta}'\bar{\eta}}(0) | 0 \rangle \langle 0 | f_{\eta\eta'}(p) | 0 \rangle \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.9.1})$$

$f_{\eta\eta'}(x,t)$ ist durch (A.8.17,18) gegeben; $|0\rangle$ ist der Grundzustand der Kernmaterie. Zunächst gilt mit der Definition der normalen Green'schen Funktionen (A.1.1)

$$\begin{aligned} \Theta(-t) \langle 0 | f_{12}(0,0) f_{34}(x,t) | 0 \rangle &= \Theta(-t) g_{0\eta, \tau\eta; 0\eta, \tau\eta}(0,t; 0^+ t^+) \\ &:= -\Theta(-t) g_{13,24}(x, -t) \quad (t := t_3 - t_1). \end{aligned} \quad (\text{A.9.2})$$

Ebenso gilt

$$\langle 0 | f_{12}(0,0) | 0 \rangle - \langle 0 | f_{12}(x,t) | 0 \rangle = -i \frac{\partial}{\partial \eta_i} g_{0\eta, \tau\eta}(0, 0^+) := f_{12}. \quad (\text{A.9.3})$$

Vergleicht man die geschweifte Klammer von (1) mit (2) und (3), so wird die Ähnlichkeit mit der linearen Antwortfunktion (A1.6),

$$L_{13,24}(x, -t) := g_{13,24}(x, -t) \cdot f_{12} f_{34}, \quad (\text{A.9.4})$$

offenkundig. Berechnet man (1) durch Einschreiben eines vollständigen Satzes von N-Teilchen-Zuständen explizit und vergleicht das Ergebnis mit der Spektraldarstellung der linearen Antwortfunktion mit den speziellen Argumenten (4), so sieht man, daß

$$\begin{aligned} \Theta(-\omega) R_0^{KM}(q, \omega; \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) &= -2 \Theta(-\omega) \operatorname{Re} \left\{ \int dt d^3r e^{i\omega t - i q \cdot r} L_{13,24}(r, t) \right\} = \\ &= \Theta(-\omega) \sum_{|S_N\rangle \neq |0_N\rangle} 2\pi \delta(\omega + E'_S) \langle 0 | \rho_{12}(-q) | S \rangle \langle S | \rho_{34}(q) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.9.5})$$

gilt. Damit ist der Zusammenhang mit der linearen Antworttheorie hergestellt. Hier soll für L nur die einfachste Näherung diskutiert werden: In der Bethe-Salpeter-Gleichung (A.1.6) werde K^{ph} vernachlässigt; d.h. Quasiteilchen und Quasiloche bewegen sich unabhängig voneinander. Dies ist beispielsweise der Fall, wenn man die Kernmaterie in Hartree-Fock-Näherung berechnet. Es wird also gesetzt:

$$L_{13,24} \approx -g_{14} g_{32} := L_{13,24}^0. \quad (\text{A.9.6})$$

Aus der linearen Antworttheorie, wie sie z.B. in (WW71) dargestellt ist, weiß man

$$\begin{aligned} L_{13,24}^0(-t) &= \frac{i}{2\pi} \int dE e^{iEt} L_{13,24}^0(E), \quad \text{a)} \\ L_{13,24}^0(E) &= -\frac{i}{2\pi} \int d\varepsilon e^{i\varepsilon E} g_{14}(\varepsilon + \frac{E}{2}) g_{32}(\varepsilon - \frac{E}{2}), \quad \text{b)} \end{aligned} \quad (\text{A.9.7})$$

mit den Teilchen-Loch-Energievariablen (A.4.11). Mit den Definitionen ($KM :=$ „Kernmaterie“)

$$g_{\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4}^{KM}(e, e') := \delta(\frac{e}{2} - \frac{e'}{2}) \delta(e - e') \tilde{g}_{14}^{KM}(\frac{e}{2}, e),$$

$$\tilde{g}_{14}^{KM}(e, e') = \int d^3r d^3r' e^{i e t - i \frac{e'}{2} t} \langle 0 | \rho_{12}(-q) | S \rangle \langle S | \rho_{34}(q) | 0 \rangle$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A_{14}^{KM}(\frac{e}{2}, \varepsilon')}{\omega(\frac{e}{2}, \varepsilon') + i0} d\varepsilon',$$

$$A_{1,1}^{KM}(\underline{k}, \epsilon) = \delta_{\eta_1 \eta_4} \left\{ \Theta(\epsilon') \sum_{S_{1,4,1}} \delta(\epsilon' - \epsilon'_S) |\langle 0 | a_{\underline{k}, \eta_1} | S \rangle|^2 + \Theta(-\epsilon') \sum_{T_{1,1}} \delta(\epsilon' + \epsilon'_T) |\langle 0 | a_{\underline{k}, \eta_1}^+ | T \rangle|^2 \right\} \quad (\text{A.9.8})$$

folgt durch Einsetzen von (7) in (5) mit $L = L^0$ nach einfacher Rechnung zunächst

$$\begin{aligned} L_{13,24}^0(q, -\omega) &:= \int d^3r dt e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r} + i\omega t} L_{13,24}^0(r, t) = \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p \left\{ \int_{-\infty}^0 d\epsilon \int_0^{\infty} d\epsilon' \frac{A_{14}(q-p, \epsilon) A_{32}(-p, \epsilon')}{\omega - (\epsilon' - \epsilon) + i0} - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^0 d\epsilon' \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \frac{A_{14}(q-p, \epsilon) A_{32}(-p, \epsilon')}{\omega - (\epsilon' - \epsilon) - i0} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.9.9})$$

und

$$\begin{aligned} \Theta(-\omega) R_0^{KM}(q, \omega; \eta_1, \dots, \eta_4) &= \delta_{\eta_1 \eta_4} \delta_{\eta_3 \eta_2} \cdot \frac{1}{(2\pi)^2} \cdot \\ &\cdot \int d^3p \int_0^{\infty} d\epsilon \int_{-\infty}^0 d\epsilon' \delta(\omega - (\epsilon' - \epsilon)) A_{11}(q-p, \epsilon) A_{33}(-p, \epsilon'). \end{aligned} \quad (\text{A.9.10})$$

Für die Spezialfälle der Hartree-Fock-Näherung (HF) sowie des idealen Fermigas (IFG) gilt

$$\begin{aligned} A_{11}^{HF}(q, \epsilon) &= \delta(\epsilon - E^{HF}(q) - E_{(p)}^{HF}) & E^{HF}(q) &= e_q + v^{1,2}(q) = E_q^{HF} \\ & & \text{mit} & \\ A_{11}^{IFG}(q, \epsilon) &= \delta(\epsilon - (e_q - e_p)) & e_q &= \frac{1}{2m} \hbar^2 q^2 = e_q \end{aligned} \quad (\text{A.9.11})$$

Setzt man (11 a) in (10) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} R_0^{KM(HF)}(q, \omega; \eta_1, \dots, \eta_4) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3p \delta(\omega - E^{HF}(p) + E^{HF}(q-p)) \cdot \\ &\cdot \Theta(E^{HF}(q-p) - E^{HF}(p)) \cdot \Theta(E^{HF}(p) - E^{HF}(p)) \delta_{\eta_1 \eta_4} \delta_{\eta_2 \eta_3} \Theta(-\omega). \end{aligned} \quad (\text{A.9.12})$$

(Für das IFG ist $E^{HF}(p)$ durch e_p zu ersetzen.) Mit der Substitution $p-q = p'$ erhält man die äquivalente Gleichung

$$\begin{aligned} R_0^{KM(HF)}(q, \omega; \eta_1, \dots, \eta_4) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3p \delta(\omega - E^{HF}(p+q) + E^{HF}(p)) \cdot \\ &\cdot \Theta(E^{HF}(p) - E^{HF}(p)) \cdot \Theta(E^{HF}(p) - E^{HF}(p+q)) \delta_{\eta_1 \eta_4} \delta_{\eta_2 \eta_3} \Theta(-\omega). \end{aligned} \quad (\text{A.9.12'})$$

Aus (12), (12') ist die anschauliche Bedeutung der Funktion $R_0(q, \omega)$ ersichtlich: Sie ist proportional der Anzahl der Möglichkeiten, unter Berücksichtigung des Pauliprinzipis einem Teilchen unterhalb der Fermikante einen Impuls q so zu übertragen, daß sich die Gesamtenergie des Systems um $-\omega = |\omega|$ erhöht.

A.10 Berechnung der Autokorrelationsfunktion für ein Hartree-Fock-Gas in effektiver-Masse-Näherung

Zur Berechnung von $R_{p_F}(q, \omega)$ (siehe (4.3.3)) wird Gleichung (A.9.12) bzw. (A.9.12') in geeigneter Weise umgeformt: Die Deltafunktion in (A.9.12') ist

$$\delta(\omega - (E(p_F + q) - E(p_F)) + E(p) - E(p_F)), \quad (\text{A.10.1})$$

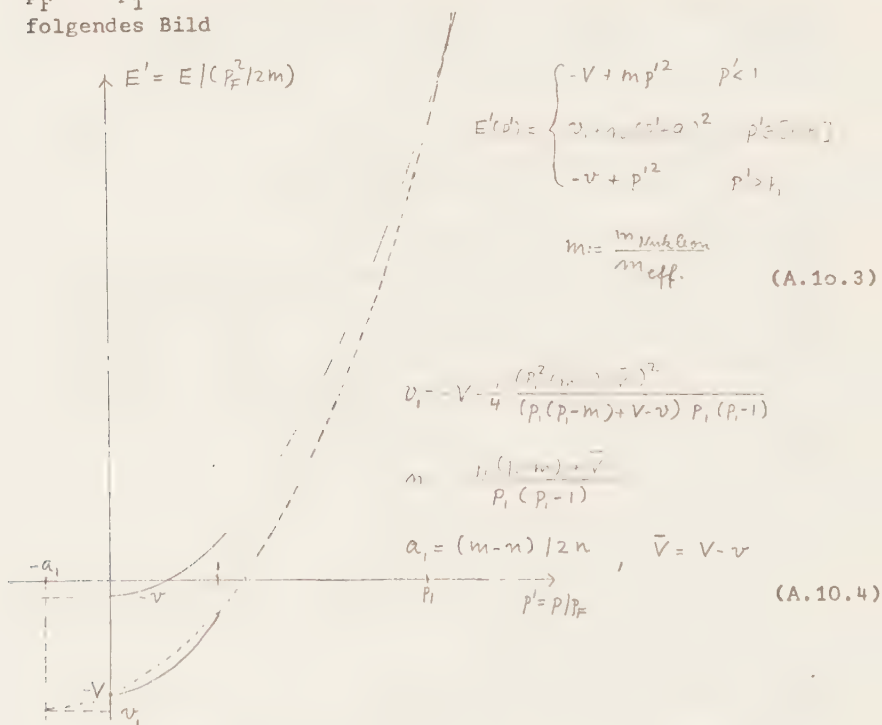
Die zweite Thetafunktion liefert: $E(p_F) - E(p_F + q) \geq 0$. Mit (1) folgt, daß $\omega + E(p) - E(p_F) \leq 0$ gelten muß. Damit kann die wegen $E(p_F + q)$ von $\cos(p, q) = \cos\theta$ abhängige Thetafunktion durch $\Theta(E(p_F) - E(p) - \omega)$ ersetzt werden, was eine entscheidende Rechenerleichterung mit sich bringt. Für ein ideales Fermigas (IFG), welches einem konstanten Potential $V < 0$ ausgesetzt ist, ist dann die Berechnung von $R_{p_F}(q, \omega)$ sehr einfach ($E(p) = p^2/2m$):

$$R_{p_F}^{IFG}(q, \omega, \eta, \eta', \eta, \eta') := R_{p_F}^{IFG}(q, p_F, \omega, E_F, \eta, \eta', \eta, \eta') = \delta \eta' \eta' \delta \eta \eta \Theta(-\omega) \cdot \frac{m p_F}{4\pi q} \cdot \left\{ \Theta(2q' q' + \omega') / \omega' + \Theta(-q' q' - 2|\omega'|) \Theta(2q' q' + \omega') \left[1 - \frac{\omega'}{q' q'} \right] \right\}. \quad (\text{A.10.2})$$

Dieses Ergebnis ist aus der Literatur schon lange bekannt (Si62).

In allen Fällen, wo die Einteilchenenergie $\epsilon_{p_F}^{HF}(p)$ keine einfache Gestalt mehr hat, ist die Berechnung der Autokorrelationsfunktion (A.9.12, 12') kompliziert. Falls man aber beispielsweise den Verlauf von $E(p)$ durch aneinandergestückelte Parabeln näherungsweise angleichen kann, läßt sich

$R_{p_F}^{HF}$ auf ähnliche Weise wie (2) analytisch berechnen: Zunächst ist $E_{p_F}^{HF}(p) = \frac{p^2}{2m} + v_{p_F}^{HF}(p)$ im Falle einer separablen Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung wie des Tabakinpotentials explizit bestimmbar (keine hard core-Schwierigkeiten). Der Verlauf von $E_{p_F}^{HF}(p)$ kann nun für $p < p_F$ in guter Näherung durch eine Parabel angeglichen werden („effektive-Masse-Näherung“). Für sehr große Werte von p nähert sich $v_{p_F}^{HF}(p)$ einem asymptotischen Wert v_{p_F} nahe Null, so daß dort $E_{p_F}^{HF}(p) = v_{p_F} + p^2/2m$ wird. Dies ist ab $p_1 \approx 3p_F$ ($\Rightarrow E \approx 9E_F$) gut erfüllt. Interpoliert man den Verlauf von $E(p)$ zwischen p_F und p_1 wiederum mit einer Parabel, so erhält man etwa folgendes Bild



Unter der Bedingung, daß $m > n > 1$ ist, bekommt man für die Autokorrelationsfunktion in diesem Falle nach umständlicher, aber einfacher Rechnung

$$K_{p_F}^{h(n)}(q'_{p_F}, \omega'_{p_F}) = \frac{m_{eff.} p_F}{2\pi m q'} \left\{ \Theta(p_1^2 - p'^2) \frac{m-n}{m n} (n a_1^2 \omega') \right\} \Theta(\sigma - n) p \, dp + \frac{m_{eff.}(p_1, p_1) \omega}{M_{eff.}(1, 1) \cdot \omega}$$

$$+ \Theta(m q'^2 - (m-1)(p_1^2 - m)) \Theta(m - \omega' - \bar{v} - p_1^2) \Theta(\omega' + \bar{v} + [m/(m-1)] q'^2) \cdot$$

$$\cdot \int_{\substack{M.u(p_2', p_3') = \sigma' \\ \text{Max}(p_1, p_0') = \mu'}} \Theta(\sigma' - \mu') p dp \} \Theta(-\omega') \quad (\text{A.10.5})$$

$$\text{mit } p_0 = -a_1 + \sqrt{a_1^2 + (m - \omega')/n}, \quad p_{3(4)} = b \pm \sqrt{b^2 + (\omega' - m q'^2)/(m-n)}$$

$$p_{0(2)}' = \frac{m}{m-1} q' \left(\frac{1}{\bar{v}} \right) \frac{1}{\sqrt{m-1}} \sqrt{\omega' + \frac{m}{m-1} q'^2}, \quad b = \frac{1}{2} + \frac{m q'}{m-n}$$

$$p_3' = \sqrt{m - \omega' - \bar{v}} \quad (\text{A.10.5'})$$

Verfolgt man den Rechengang im einzelnen, so ist es leicht festzustellen, daß für $v \rightarrow 0$, $a_1 \rightarrow 0$, $m \rightarrow 1$, $n \rightarrow 1$ in der Tat der Grenzfall des idealen Fermigases, Gleichung (2), herauskommt.

A.11 Das Tabakin-Potential; die quadrierte Streuamplitude

Das Tabakin-Potential (siehe Ta64) ist ein nicht-lokales Potential, welches an die Deuteron-Bindungsenergie sowie an die Streuphasen (bis $^{2S+1}LL'J = ^3D_3$) bis zu Energien von 320 MeV angepaßt ist. Es hat die Gestalt

$$\langle k' | V_{\text{Tab.}} | k \rangle = \frac{2}{\pi^2} \sum_{\substack{L, L', S \\ T, T_3}} Y_{L, L'}^{LS}(\Omega_{k'}) |TT_3\rangle V_{LL'}^{JST}(k', k) \langle TT_3 | Y_{L, L'}^{LS}(\Omega_k)^* \quad (\text{A.11.1})$$

$$\text{mit } i^{L-L'} V_{LL'}^{JST}(k', k) = \{ h_{LL'}^{JST}(k') h_{LL'}^{JST}(k) - g_{LL'}^{JST}(k') g_{LL'}^{JST}(k) \} \quad (\text{A.11.2})$$

Die Funktionen $h_{LL'}^{JST}(k)$ und $g_{LL'}^{JST}(k)$ sowie die Berechnung der T-Matrix $\langle k' | T_{\text{Tab.}} | k \rangle$ und die Bestimmung des Hartree-Fock-Potentials für Kernmaterie sind in der Originalarbeit von Tabakin (Ta64) nachzulesen. Aufgrund des Ansatzes (2) ist auch die T-Matrix separabel, so daß für diese eine (1) entsprechende Gleichung existiert, in der die $V_{LL'}^{JST}(k', k)$ durch die in (Ta64) angegebenen separablen $V_{LL'}^{JST}(k', k)$ zu ersetzen

sind. Die Streuamplitude f ist proportional zu t :

$f = (m_{\pi} c / 2\pi) t = \frac{1}{4\pi} m_{\pi} t$. Sie muß in Formel (4.3.5) eingesetzt werden. Wie in (4.3.6) angedeutet ist wegen

$$\bar{R}_{P_F(R)}^{KM(HF)}(\underline{k}, \underline{k}', \eta_1, \eta_2) = \delta_{\eta_1 \eta_2} \delta_{\eta_1 \eta_2} \bar{\tau}_{P_F(R)}^{KM(HF)}(\underline{k}, \underline{k}') \quad (\text{A.11.3})$$

Gleichung (4.3.4) gleichbedeutend mit

$$J_{m_i} V_{\text{opt}_L}(R, e_{k_i}) = - \frac{k^2}{4\pi m^2} \sum_{\substack{\eta_i \eta_f \\ \eta_i \eta_f}} \alpha^3 k' \sum_{\eta_i \eta_f} |\langle \underline{k}' \eta_f \eta_i | \underline{k} \eta_i \eta_f \rangle|^2 \bar{\tau}_{P_F(R)}^{KM(HF)}(\underline{k}, \underline{k}') \quad (\text{A.11.4})$$

Da $\bar{\tau}(\underline{k}, \underline{k}')$ vom Winkel $\cos(\underline{k}, \underline{k}') = \cos \vartheta$ abhängt, ist die Integration in (4) nicht analytisch durchführbar. Die Summe über die Streuamplitudenquadrate in (4) ergibt den Ausdruck

$$\sum_{\substack{\eta_i \eta_f \\ \eta_i \eta_f}} |\langle \underline{k}' \eta_f \eta_i | \underline{k} \eta_i \eta_f \rangle|^2 = \frac{4\pi}{m^2} \sum_{ST} (2T+1) \cdot \sum_{\substack{\ell \ell' \\ j m'}} \left| \sum_{\substack{\ell \ell' \\ j m'}} \sqrt{2\ell+1} \begin{pmatrix} \ell & S & j \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell' & S & j \\ m' & 0 & 0 \end{pmatrix} Y_{\ell'}^{m'}(\Omega_{\underline{k}}) t_{\ell \ell'}^{jST}(\underline{k}', \underline{k}) \right|^2 \quad (\text{A.11.5})$$

Führt man die Rechnung mit den Partialwellen von Tabakin explizit durch, so sieht man, daß dies nur von k' , k und $\cos \vartheta$ abhängt.

Da das Tabakin-Potential keinen Hard-Core hat, ist das Hartree-Fock-Potential für Kernmaterie (vgl. die Definition (4.3.11)),

$$\tilde{V}^{HF}(p) = \sum_{p' < p_F} \langle p' p | V_{\text{Tab.}} | p' p - p p' \rangle, \quad (\text{A.11.6})$$

endlich. Dies ermöglicht überhaupt erst die Anwendung der Dispersionsbeziehung (4.3.7).

Literaturverzeichnis

- Ab63 A.A. Abrikosov, L.P. Gor'kov und I.E. Dzyaloshinski, „Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics“, Pergamon Press, Oxford 1963
- ARK69 I. Ahmad und M.Z. Rahman Khan, Nucl.Phys. A132(69)213
- Ba70 M. Baranger, Nucl.Phys. A149(70)225
- Be62 J.S. Bell in „Lectures on the Many Body Problem“, S.91, ed. Caianello, Academic Press, New York 1962
- BK62 G. Baym und L.P. Kadanoff, „Quantum Statistical Mechanics“, Benjamin, New York 1969
- BM69 A. Bohr und B.R. Mottelson, „Nuclear Structure“, Vol.1, Benjamin, New York 1969
- Br67 W. Brenig, Z.Physik 202(67)340
- BS59 J.S. Bell und E.J. Squires, Phys.Rev.Lett. 3(59)96
- BW63 W. Brenig und H. Wagner, Z.Physik 173(63)484
- Co70 M. Coz et al., Ann.Phys. 59(70)219
- Cu71 J. Cugnon, Nucl.Phys. A155(71)393
- CV55 E. Clementel und C. Villi, Nuovo Cim. 2(55)176
- Em71 K. Emrich, Nucl.Phys. A160(71)1
- ES69 S. Ethofer und P. Schuck, Z.Physik 228(69)264
- Et69 S. Ethofer, Z.Physik 225(69)353
- Fe58 H. Feshbach, Ann.Phys. 5(58)357
- Fe62 H. Feshbach, Ann.Phys. 19(62)287
- Fi66-68 H. Fiedeldey, Nucl.Phys. 77(66)149; Nucl.Phys. A96(67)463; Nucl.Phys. A115(68)97
- Fr65 W.E. Frahn, Nucl.Phys. 66(65)358
- FW71 A.L. Fetter und J.D. Walecka, „Quantum Theory of Many Particle Systems“, Mc GrawHill, New York 1971
- GHW67 W. Glöckle, J. Hüfner und H.A. Weidenmüller, Nucl. Phys. A90(67)481
- G159 R.J. Glauber, in „Lectures in Theoretical Physics“, (Boulder Lectures), Interscience Publishers, New York 1959
- GL70 D.H.E. Gross und R. Lipperheide, Nucl.Phys. A150(70)449
- Go48 M.L. Goldberger, Phys.Rev. 74(48)1269
- Gp69 D. Gross, Nucl.Phys. A129(69)45
- GW67 M.L. Goldberger und K.M. Watson, „Collision Theory“,

- Wiley, New York 1967
- HJ62 T. Hamada und I.D. Johnston, Nucl.Phys. 34(62)382
- Ho63 P.E. Hodgson, „The Optical Model of Elastic Scattering“, Oxford University Press, London 1963
- Ho71 P.E. Hodgson, „Nuclear Reactions and Nuclear Structure“, Clarendon Press, Oxford 1971
- Ko62 D.H. Kobe, Ann.Phys. 19(62)448
- LBD74 A. Lev, W.P. Beres und M. Davideenam, Phys.Rev. C9(74)2416
- Ld59 L. Landau, Sov.Phys.JETP 8(59)70
- Lip66 R. Lipperheide, Nucl.Phys. 89(66)97
- LM63-64 A.I. Larkin und A.B. Migdal, Sov.Phys. JETP 17(63)1146; Sov.Phys. JETP 18(64)717
- LS69 R. Lipperheide und A.K. Schmidt, Nucl.Phys. A112(69)49
- Lu61 J.M. Luttinger, Phys.Rev. 121(61)942
- Ma74 A.D. Mackellar et al., Nucl.Phys. A225(74)61
- Mi65 M.A. Mikulinskii, Sov.Journal of Nucl.Phys. 3(66)175
- Mig61 A.B. Migdal, Sov.Phys. JETP 13(61)478
- Mig62 A.B. Migdal, Sov.Phys. JETP 16(62)1366
- Mig66 A.B. Migdal, „Many Body Description of Nuclear Structure and Reactions“, Hrsg. C. Bloch, Academic Press, New York 1966, S.171
- Mig67 A.B. Migdal, „Theory of Finite Fermi Systems“, Wiley-Interscience, New York 1967
- ML64 A.B. Migdal und A.I. Larkin, Nucl. Phys. 51(64)561
- MS59 P.C. Martin und J. Schwinger, Phys.Rev. 115(59)1342
- MW69 C. Mahaux und H.A. Weidenmüller, „Shell Model Approach to Nuclear Reactions“, North Holland, Amsterdam 1969
- My73 W. Myers, Nucl.Phys. A204(73)465
- No64 P. Nozières, „Interacting Fermi Systems“, Benjamin, New York 1964
- Pa67-68 G. Passatore, Nucl.Phys. A95(67)694; Nucl.Phys. A110(68)91
- PB62 F. Perey und B. Buck, Nucl.Phys. 32(62)353
- Pu61 R.D. Puff, Ann.Phys. 13(61)317
- Re64 A.S. Reiner, Phys.Rev. 133(64)B1105

- Ri63 G. Ripka, Nucl.Phys. 42(63)75
- RP63 J.C. Reynolds und R.D. Puff, Phys.Rev. 130(63)1877
- RT67 L.S. Rodberg und R.M. Thaler, „Introduction to the Quantum Theory of Scattering“, Academic Press, New York und London 1967
- Si62 A.G. Sitenko, Nucl.Phys. 39(62)506
- Su71 P. Schuck, Seminarbericht TU München, SS 1971
- SVR73 P. Schuck, F. Villars und P. Ring, Nucl.Phys. A208 (73)302
- Ta64 F. Tabakin, Ann.Phys. 30(64)51
- VG58 L. Verlet und J. Gavoret, Nuovo Cim. 10(58)505
- Vi67 F. Villars, in „Fundamentals in Nuclear Theory“, Hrsg. A. de Shalit und C. Villi, IAEA, Wien 1967
- VM70 N. Vinh Mau, Vorlesung auf dem „International Course of Trieste“, IAEA-SMR 6/51, 1970
- We69 G. Wegmann, Z.Physik 226(69)60
- Wg69 M. Weigel, Nucl.Phys. A137(69)629
- Wg74 M.K. Weigel, J.Physics A7(74)1731
- Wi72 J. Winter, Nucl.Phys. A194(72)535
- Wi75 J. Winter, Dissertation, Univ. München 1975
- WM68 M. Weigel und D. Mack, Zeitschr. für Naturf. 23a (68)1888
- WW71 M. Weigel und G. Wegmann, Fortschritte d.Phys. 19 (71)451
- Zh65 F.A. Zhivopistsev, Sov.Journal of Nucl.Phys. 1(65)429

Ich danke Herrn Prof. Dr. G. Süßmann für sein förderndes Interesse an dieser Arbeit.

Herrn Prof. Dr. M. Weigel möchte ich an dieser Stelle für die Anregung zu dieser Arbeit, seine fortwährende Betreuung und für viele interessante und klärende Diskussionen danken.

Herrn Dr. J. Winter schulde ich ebenfalls Dank für seine Anteilnahme und Unterstützung durch anregende und erhellende Gespräche. Auch Herrn B. Schwesinger danke ich für seine Diskussionsbeiträge und stete Ermunterung.

Herrn Dr. D. Mack danke ich sehr für die freundliche Überlassung von Programmen.

Diese Arbeit wurde durch ein Graduiertenstipendium des Bundes ermöglicht.

Lebenslauf

Ich wurde am 9. September 1945 als Sohn des Universitätsdozenten Dr. Ing. Gottfried Eckart und dessen Ehefrau, Dr. Charlotte Eckart, geb. Rohmer, in Pähl/Obb. geboren. Vom Herbst 1950 bis zum Herbst 1953 besuchte ich die Volksschule in St. Prix bei Paris, danach, vom Herbst 1953 bis zum Herbst 1955 die Volksschule in Scheidt/Saar. Anschließend war ich Schüler des staatlichen Ludwigsgymnasiums in Saarbrücken (humanistischer Zweig), wo ich im Februar 1964 die Reifeprüfung bestand. Mit dem Sommersemester 1964 begann ich an der Universität des Saarlandes das Studium der Physik, wo ich im Wintersemester 1966 die Diplomvorprüfung ablegte. Während des Studienjahres 1967/68 war ich als Stipendiat des französischen Staates ordentlicher Hörer an der Faculté des Sciences in Paris. Anschließend setzte ich mein Physikstudium an der Universität München fort, wo ich am Institut für theoretische Physik (Lehrstuhl Prof. Süßmann) meine Diplomarbeit anfertigte und im Dezember 1970 die Diplom-Hauptprüfung ablegte. Vom April 1971 bis Ende Juli 1972 arbeitete ich als Lehrer im Angestelltenverhältnis am Privatgymnasium Dr. Chmiel in München. Durch ein Graduiertenstipendium des Bundes wurde mir dann die Anfertigung der Dissertation ermöglicht, mit der ich im August 1972 am selben oben genannten Lehrstuhl begann.

